目　　录

第一章　集论及分析基础

§1　集与函数

伟大的德国数学家 G. Cantor(1845—1918) 通常被认为是集论的创立者. 本书就采用他关于集的定义作为出发点. 这个定义是:"一个集[①] 是由我们思想中的或者可感知的一些确定的, 可以分辨的对象所组成, 并被看成一个整体的任意一个集体."定义中说到的对象称为集的元素或元. 通常我们用大写字母表示集, 用小写字母表示集的元素. 如果 X 是一个集, 那么 $x\in X$ 表示 x 是集 X 的一个元素. 当 x 不是集 X 的元素时记为 $x\notin X$.

下面, 我们将使用下列的集而不加解释, 它们在整个数学中都会出现:

$N=\{1, 2, 3, \cdots\}$, 全体正整数的集;

$Z=\{0, 1, -1, \cdots\}$, 全体整数的集;

Q, 全体有理数的集;

R, 全体实数的集;

C, 全体复数的集.

上述记号的来历是: N 来自英文 natural numbers(自然数), Z 来自德文 Zahlen(整数), Q 来自英文 quotient(商). 记号 R 和 C 来自英文 real(实的)和 complex(复的).

通常, 在某一个具体的讨论中, 我们取定一个固定的集, 并且一切讨论仅仅关于它来进行. 这时, 这个固定的集称为论域. 例如, 在数论中论域是 Z. 在论域 X 内构成一个集的通常的方法是在 X 中取某一类型的对象, 然后考虑所有这样的对象的集. 例

① "集"也常译成"集合"——译者注.

如，在 Z 中定义称为素数的对象，于是可以考虑全体素数的集.

在本书中，我们主要是对集作运算，而不是讨论它的更深的性质. 为此，我们引进记号和定义，同时讲述一些简单的结果.

首先，一般地说，没有一个明显地写出集的所有元素的方法. 例如，正整数 N 的集按其本性就不能明显地列出它的全部元素. 我们不得不满足于写 $N=\{1, 2, 3, \cdots\}$；省略号留下很多想象余地. 通常，我们用花括号来记集，在括号中或者是写出集的少数几个元素，然后用省略号表示构成集的元素的规则是大家知道的或是明显的；或者在花括号中写出构成集的元素的规则. 例如，$\{x|x\in N$ 且 $x>8\}$ 读为"所有 x 的集，x 满足：x 是正整数且 x 大于8". x 后面的竖线读为"满足"或"使得". 所以，上面的集也可以写为 $\{9, 10, 11, \cdots\}$. 又如 $\{x|x\in R$ 且 $x>0\}$ 表示全体正实数的集. 在这个情形不能明显地写出元素，甚至要把构成集的元素的规则表述出来也是不可能的，这是实数的性质. 事实上，以后我们将看到，集 $\{x|x\in R$ 且 $x>0\}$ 是不可列的，因此，元素不能写成一个无穷序列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$. 我们注意，在一个集中元素的顺序一般是没关系的. 例如，N 与 $\{2, 1, 4, 3, 6, 5, \cdots\}$ 是相同的集.

设 A, B 是集，则记号 $A\subset B$ 表示集 A 的每一个元素也是集 B 的一个元素. 如果 $A\subset B$，则称 A 是 B 的一个子集，A 包含在 B 中，亦即 B 包含 A. 记号 $B\supset A$ 看作与 $A\subset B$ 等价. 当且仅当 $A\subset B$ 且 $B\subset A$ 时，定义 $A=B$；当且仅当 $A\subset B$，但 $A\neq B$ 时称 A 是 B 的一个真子集. 例如，奇数集是 Z 的一个真子集. 注意，有些作者用记号 $A\subseteq B$，这个记号允许两集相等，而给真子集保留记号 $A\subset B$. 有时我们也说："严格地 $A\subset B$"，意即 A 是 B 的一个真子集.

集的包含 $\subset$ 有两个简单的性质：

(i) $A\subset A$,

(ii) 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset C$, 那么 $A\subset C$.

如果 A 是一个给定的集, 我们考虑 A 的子集 $\{x\in A|x\neq x\}$. 这个集没有元素,称为空集. 空集用符号 $\emptyset$ 表示, 它有性质: 对每个集 A, $\emptyset\subset A$. 每个集 $A\neq\emptyset$, 至少有两个明显的子集: A 与 $\emptyset$. 如果 A 仅有这样两个子集, 那么 A 一定是一个单元素集, 比如说 $A=\{a\}$, 这里 a 是 A 的唯一元素. $\emptyset$ 没有元素,但是单元素集$\{\emptyset\}$是不空的.

集的并与交 给定集 A, B, 用它们构成两个新的集:

$$A\cup B=\{x|x \text{ 至少属于 } A \text{ 与 } B \text{ 中之一}\},$$

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

我们称集 $A\cup B$ 为集 A 与集 B 的并,称集 $A\cap B$ 为集 A 与集 B 的交①. 例如,

$$\{1, 2, 3\}\cup\{1, 4, 3\}=\{1, 2, 3, 4\},$$

$$\{2, 3\}\cap\{1, 3, 2\}=\{2, 3\}.$$

对任意的集 A 和 B, 显然 $A\cap B\subset A\subset A\cup B$. 如果 $A\cap B=\emptyset$, 那么称 A 与 B 不相交.

我们经常需要构造一类(或族)集的并或交. 假定$\mathscr{S}$是由一些集 A 所成的一个集类(集族). 我们定义

$$\cup\{A|A\in\mathscr{S}\}=\{x|x\in A, \text{ 至少对于一个 } A\in\mathscr{S}\},$$

$$\cap\{A|A\in\mathscr{S}\}=\{x|x\in A, \text{ 对于所有 } A\in\mathscr{S}\}.$$

有时我们写 $\cup A_\alpha$, $\cap A_\alpha$, 这里, 我们认为 α 取遍某一个指标集. 如果 α 取遍 N, 通常写为

$$\cup\{A_n|n\in N\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,$$

类似地有 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$. 记号中的 ∞ 是按惯例写的,引入它即使不说造成混乱,但也是多余的. 要特别指出, 在族 $\{A_n|n\in N\}$ 中并没有

① 集的"并"、"交"也常叫"并集"、"交集"——译者注.

A_∞. 还要注意，上面叙述中没有涉及极限过程．因此，比如说 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，意即存在一个正整数 p 使得 $x\in A_p$.

例 1 设 A_n 是实数直线上的区间$\left[0,\ 1+\dfrac{1}{n}\right)$，即

$$A_n=\left\{x\in R\,|\,0\leqslant x<1+\frac{1}{n}\right\},\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

那么
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=[0,\ 1]=\{x\in R\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

为了证明它，我们首先证明 $[0,\ 1]\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$，其次证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subset[0,\ 1]$．设 $x\in[0,\ 1]$，那么有 $0\leqslant x\leqslant 1<1+\dfrac{1}{n}$ 对一切 $n\in N$ 成立，就是说对一切 $n\in N$，$x\in A_n$，即 $x\in\bigcap A_n$．反过来，若对一切 $n\in N$，$x\in A_n$，则有 $0\leqslant x<1+\dfrac{1}{n}$，由此 $0\leqslant x\leqslant 1$．（令 $n\to\infty$ 即得；或假定 $x>1$，这与 $x<1+\dfrac{1}{n}$ 对一切 $n\in N$ 成立矛盾.）

集的覆盖 设 $\mathscr{S}$ 是一些集 A 所成的一个集类，当且仅当

$$X\subset\bigcup\{A\,|\,A\in\mathscr{S}\}$$

时，称 $\mathscr{S}$ 为集 X 的一个覆盖．如果 $\mathscr{S}$ 的某一子类也覆盖 X，那么称它为 $\mathscr{S}$ 的一个子覆盖．

在第二章，关于紧致集要用到开覆盖的概念．这里“开”是指覆盖中的集是拓扑意义下的开集．目前我们只举一个很简单的覆盖例子．

例 2 （i）设 I_n 是实数直线上的开区间

$$(n,\ n+1)=\{x\in R\,|\,n<x<n+1\},$$

那么集族 $\{I_n|n\in Z\}$ 不是 R 的一个覆盖，因为整数不属于 $\bigcup\{I_n|n\in Z\}$.

（ii）设 $J_n=\{x\in R\,|\,n\leqslant x<n+1\}=[n,\ n+1)$，那么集族 $\{J_n|n\in Z\}$ 是 R 的一个覆盖.

(iii) 设 $S[a, r]=\{z\in C \mid |z-a|\leqslant r\}$，其中 $a\in C$, $r>0$. 那么 $S[a, r]$ 是复平面上以 a 为圆心、以 r 为半径的闭圆盘. 显然集族 $\{S[m+in, 1] \mid m, n\in Z\}$ 是 C 的一个覆盖.

余集　设 X 是论域, A、$B\subset X$, 定义

$$A\sim B=\{x\in X \mid x\in A, x\notin B\},$$

我们称集 $A\sim B$ 是集 B 关于集 A 的余集. 用 $\sim A$ 表示 $X\sim A$, 并称 $\sim A$ 为 A 的余集. 显然 $A\sim B=A\cap(\sim B)$, $\sim(\sim A)=A$, 和 $A\subset B$ 等价于 $\sim B\subset\sim A$.

关于余集的下列两个结果通常称为 De Morgan 法则:

$$\sim\bigcup A_\alpha=\bigcap(\sim A_\alpha);\quad \sim\bigcap A_\alpha=\bigcup(\sim A_\alpha).$$

作为例子. 我们证明第一个法则. 只须注意对一切 α, $x\in\sim A_\alpha$ 等价于对任一 α, $x\notin A_\alpha$.

容易证明并和交的另外一些性质:

(i) $\bigcap A_\alpha\subset A_\alpha\subset\bigcup A_\alpha$, 对任何 α 成立,

(ii) $A\cup(\bigcap A_\alpha)=\bigcap(A\cup A_\alpha)$,

(iii) $A\cap(\bigcup A_\alpha)=\bigcup(A\cap A_\alpha)$.

有序对　设 x, y 是任何对象. 那么定义有序对 (x, y) 为集 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. 容易验证有序对的基本性质: $(x, y)=(u, v)$ 当且仅当 $x=u$, $y=v$. 更一般地, 我们可以类似地定义一个有序 n 元组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 它具有性质: $(x_1, \cdots, x_n)=(y_1, \cdots, y_n)$ 当且仅当 $x_1=y_1$, $\cdots$, $x_n=y_n$.

关系　一个关系 ρ 定义为由有序对所成的集. 例如, $\rho=\{(1,2), (a, b)\}$ 是一个关系.

与 $(x, y)\in\rho$ 等价的记号是 $x\rho y$. 于是,上例中可以写 $1\rho 2$ 代替 $(1, 2)\in\rho$.

一类重要的关系是

Descartes 乘积　设 X、Y 是给定的集, 那么称

$$X\times Y=\{(x,\ y)\,|\,x\in X,\ y\in Y\}$$

为 X 与 Y 的 Descartes 乘积.

另一个重要关系是

等价关系 设 X 是一个给定的集. X 上的一个关系 ρ 称为 X 上的一个等价关系,当且仅当它满足(i)自反性,即对所有 $x\in X$,有 $x\rho x$;(ii)对称性,即若 $x\rho y$,那么 $y\rho x$;(iii)传递性,即若 $x\rho y$,$y\rho z$,那么 $x\rho z$. 通常用～而不用 ρ 表示等价关系,这样表示几乎没有与余集混淆的危险.

例 3 (i) 相等显然是任何集上的一个等价关系.

(ii) 设 $X=\{(x,\ y)\,|\,x,\ y\in N\}$. 如果定义 $(x,\ y)\sim(u,\ v)$ 是指 $xv=yu$,那么～是集 X 上的一个等价关系. 例如,我们验证传递性:设 $(x,\ y)\sim(u,\ v)$,$(u,\ v)\sim(z,\ w)$,那么 $xv=yu$,$uw=vz$,由此 $xvuw=yuvz$,从而 $xw=yz$,即 $(x,\ y)\sim(z,\ w)$.

(iii) 如果定义 $x\sim y$ 是指 $x-y$ 能被 2 除尽. 容易验证～是集 Z 上的一个等价关系.

我们回到一般的关系. 关系的定义域是它的元素的所有第一个坐标的集,关系的值域是它的元素的所有第二个坐标的集. 如果～是集 X 上的一个等价关系,那么我们定义 $E_x=\{y\in X\,|\,y\sim x\}$,并称 E_x 为含元素 x 的等价类. 例如,在例 3(iii)中,我们有

$$E_0=\{0,\ \pm2,\ \pm4,\ \cdots\}.$$

一般,容易验证:当且仅当 $x\sim y$ 时,$E_x=E_y$,而且还可验证:如果 $E_x\neq E_y$,那么 $E_x\cap E_y=\emptyset$. 显然,集类 $\{E_x|x\in X\}$ 构成集 X 的一个划分,即 X 是这些不相交的 $E_x(x\in X)$ 的并. 例如在例 3(iii)中,我们有

$$Z=\{0,\ \pm2,\ \pm4,\ \cdots\}\cup\{\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \cdots\}.$$

数学中出现的最重要的一类关系或许就是所谓函数关系. 有些分析书广泛地使用函数而实际上没有定义函数,对于习惯于这

样的分析书的那些人，下列函数的定义似乎是相当古怪的.

函数 函数 f 定义为一个关系，它满足：如果 $(x, y) \in f$，$(x, z) \in f$，那么 $y=z$. 函数的另外四个术语是映象，映射，算子，变换.

我们这个作为一定的有序对的集的函数概念，有些人称它为函数的图. 因为通常他们定义函数是一个法则或者类似的东西. 有时，当用"函数的图"的术语看来能更好表达时，我们将使用它，然而，对我们来说，函数和它的图完全是同一回事.

例4 (i) $\{(1, 2), (2, 2)\}$ 和 $\{(z, z+1) | z \in C\}$ 是函数.

(ii) $\{(1, 2), (1, 4)\}$ 和 $\{(x^2, x) | x \in R\}$ 不是函数. 例如 $(1, 1)$ 和 $(1, -1)$ 都在第二个集中.

(iii) $\{(x^2, x) | x \in R^+\}$ 是一个函数. 其中 $R^+ = \{x \in R | x > 0\}$. 在这个情形，如果第一个坐标是相等的，即 $x^2 = y^2$，那么 $(x-y)(x+y) = 0$，所以 $x=y$，即第二个坐标是相等的.

如果 f 是一个函数，$(x, y) \in f$，那么我们记 $y=f(x)$，这是 y 作为 x 的一个函数的常用记号. 称 y 是 f 在 x 处的值，或 y 是 x 在 f 下的象.

记号 $$f: X \to Y$$
现在在数学中广泛地使用. 它可以解释为：f 是把集 X 映到集 Y 中的一个函数. 它的意思是 X 是 f 的定义域，且 f 的值域是 Y 的一个子集，而不必是整个 Y.

如果 $f: X \to Y$ 且 $A \subset X$，那么，对于 $a \in A$，由 $g(a) = f(a)$ 所定义的函数 $g: A \to Y$ 称为是 f 在 A 上的限制.

例5 (i) 定义 $f: f(x) = e^x$, $x \in R$，即 f 的定义域是 R，且 $f = \{(x, e^x) | x \in R\}$. f 的值域实际上是 R^+，这是大家熟知的. 我们可以写为 $f: R \to R$，也可以更精确地写为 $f: R \to R^+$.

(ii) 定义 $f: f(z) = |z|$, $z \in C$. 一步比一步精确地写出就是

$f:C\to C$, $f:C\to R$, 以及 $f:C\to\{x\in R|x\geqslant 0\}$.

双射映象　设 $f:X\to Y$. 如果对每一 $x_1, x_2\in X$, 由 $f(x_1)=f(x_2)$ 可得到 $x_1=x_2$, 那么称 f 为单射的. 如果 f 的值域是整个 Y, 那么称 f 是满射的. 如果一个映射 f 既是单射的, 又是满射的, 那么称 f 为双射的.

"单射的", "满射的"和"双射的", 有时又分别称为"一一的", "映上的", "一一对应的".

例 6　如果 $f:R\to\{x\in R|x\geqslant 0\}$ 由 $f(x)=x^2$ 所定义, 那么 f 是满射的, 但不是单射的. 如果对 f 用同样的等式表示, 但写成 $f:R^+\to R^+$, 那么 f 就是双射的.

反函数　设 $f: X\to Y$ 是双射的. 因为 f 是满射的, 所以如果 $y\in Y$, 那么存在 $x\in X$, 使得 $y=f(x)$. 又由于 f 是单射的, 所以这个 x 是唯一的. 因此, 有一个反函数 $g:Y\to X$, 使得对一切 $x\in X$, 有 $g(f(x))=x$, 以及对一切 $y\in Y$, 有 $f(g(y))=y$. 通常记为 $g=f^{-1}$.

例 7　由 $f(x)=e^x$ 定义的 $f: R\to R^+$ 是双射的, 它的反函数 $f^{-1}:R^+\to R$ 用 log 表示.

等势集　集 X, Y 称为是等势的(记为 $X\sim Y$), 当且仅当存在双射映象 $f: X\to Y$. 我们注意, $\sim$ 是一个等价关系. 例如 $X\sim X$, 因为由 $f(x)=x$ 给出的映象 $f:X\to X$ 就是一个合适的双射.

例 8　(i) $\{1, 2, 3\}\sim\{1, 3, 5\}$; $\{2, 4, 6, \cdots\}\sim N$, 且 $N\sim Z$.

(ii) $\{1, 2\}$ 与 $\{1, 2, 3\}$ 不是等势的.

(iii) R 中的区间 $(-1, 1)$ 与 R 是等势的. 因为

$$f(x)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

就是合适的双射.

可列集　一个集称为是可列的，当且仅当它与集 N 等势或与 N 的子集等势. 否则称它为不可列集. 在集与 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 等势的情形，称它为 n 元有限集.

集 N, Z 和 Q 都是可列集的例子. 实数集 R 是不可列集(见习题 12). 显然，可列集的任何子集是可列集. 还有，如果 A_n, $n=1, 2, \cdots$ 是一列可列集，那么 $\bigcup\{A_n | n\in N\}$ 是可列集，这就是说，可列个可列集的并集是可列集. 为了"列出"可列集 $\bigcup A_n$ 的元素，我们这样来做. 设 $A_n=\{a_{n1}, a_{n2}, \cdots\}$, $n=1, 2, \cdots$, 那么只要剔除重复，集

$$\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, \cdots\}$$

是 A_n 的并集且是可列集. 例如，如果

$$A_1=\{2, 3, 4, 5, 6, \cdots\}, \quad A_2=\{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\},$$

那么按上述作法得到集 $A_1\cup A_2=\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 7, 10, \cdots\}$.

例 9　设 $A_n=\{m/n | m\in Z\}$, $n=1, 2, \cdots$. 因为 Z 是可列集，所以每一个 A_n 是可列的，并且 $\bigcup A_n=Q$. 因此 Q 是可列的. 于是 Q 与 N 等价，尽管 N 是 Q 的一个非常"稀疏的"子集.

象和原象　设 $f: X\to Y$, 且 $A\subset X$, $B\subset Y$. 那么定义 $f(A)=\{f(x) | x\in A\}$ 为集 A 在映射 f 下的象. 定义 $f^{-1}(B)=\{x | x\in X \text{ 且 } f(x)\in B\}$ 是集 B 的原象. 注意 $f^{-1}(B)$ 是 X 的子集；为了我们可以写 $f^{-1}(B)$, 不必要求 f 是双射的.

下面给出象和原象的基本性质.

定理 1　设 $f: X\to Y$, 且 $\{A_\alpha\}$ 是集 X 的子集所成的类，$\{B_\alpha\}$ 是 Y 的子集所成的类，那么

(i) 如果 $A_\alpha\subset A_\beta$, 就有 $f(A_\alpha)\subset f(A_\beta)$;

(ii) 如果 $B_\alpha\subset B_\beta$, 就有 $f^{-1}(B_\alpha)\subset f^{-1}(B_\beta)$;

(iii) $f(\bigcup A_\alpha)=\bigcup f(A_\alpha)$;

(iv) $f(\bigcap A_\alpha)\subset\bigcap f(A_\alpha)$;

(v) $f^{-1}(\bigcup B_\alpha)=\bigcup f^{-1}(B_\alpha)$;

(vi) $f^{-1}(\bigcap B_\alpha)=\bigcap f^{-1}(B_\alpha)$;

(vii) $A_\alpha\subset f^{-1}(f(A_\alpha))$;

(viii) $f(f^{-1}(B_\alpha))\subset B_\alpha$.

证明 作为例子，我们证明(iii)．如果 $y\in f(\bigcup A_\alpha)$，那么存在 $x\in\bigcup A_\alpha$，使得 $y=f(x)$．这就是说，存在某个 α，使得对 $x\in A_\alpha$，$y=f(x)$．所以，$y\in f(A_\alpha)\subset\bigcup f(A_\alpha)$．反过来，如果 $y\in\bigcup f(A_\alpha)$，那么存在某一个 α'，使得 $y\in f(A_{\alpha'})$，那么 $y=f(x)$，其中 $x\in A_{\alpha'}\subset\bigcup A_\alpha$．因此 $y\in f(\bigcup A_\alpha)$．这就证明了(iii)．其余结果的证明留作习题．要注意(iv)和(vi)之间的不同．

复合函数　设 $f:X\to Y$，且 $g:Y\to Z$，这里 f、g 是任何函数，且 X、Y、Z 是任何集．对每一个 $x\in X$，用 $(gf)(x)=g(f(x))$ 定义复合(或乘积)函数 $gf:X\to Z$.

复合函数显然是初等微积分中所说的函数的函数．

半序关系　设 X 是一个集．集 X 上的半序关系(通常用 $\prec$ 表示)是满足下列条件的一个关系：(1)自反性(即对每一 $x\in X$ 有 $x\prec x$)．(2)传递性(即如果 $x\prec y$ 和 $y\prec z$，那么 $x\prec z$)．(3)反对称性(即如果 $x\prec y$ 和 $y\prec x$，就有 $x=y$)．

如果一个半序关系 $\prec$ 还具有性质：对任何 x、y，或者 $x\prec y$，或者 $y\prec x$，那么称 $\prec$ 为一个全序关系．

半序集是由集 X 和集 X 上的半序关系组成的对 $(X,\prec)$．全序集可以类似地定义．

例 10 (i) 设 $\mathscr{A}$ 是任何一个集族．那么集的包含关系 $\subset$ 是集族 $\mathscr{A}$ 上的半序，一般它不是 $\mathscr{A}$ 上的全序．

(ii) 实数集 R 上的“自然的”全序当然是 $\leqslant$．

(iii) 在 N 上定义 $\prec$ 如下：设 x，$y\in N$，当且仅当 x 是 y 的整

数倍时，定义$x \prec y$. 那么显然$\prec$是N上的一个半序，它不是全序. 例如，3不是2的整数倍，3的整数倍也不会是2.

设$(X, \prec)$是一个半序集，$a \in X$，当且仅当对一切$x \in X$，由$a \prec x$就有$x=a$，那么称a是X的极大元. 设$b \in X$，当且仅当对一切$x \in X$，由$x \prec b$就有$x=b$，那么称b是X的极小元.

设$A \subset X$，元$M \in X$称为集A的一个上界，当且仅当对一切$x \in A$，有$x \prec M$. 类似地，元$m \in X$称为集A的一个下界，当且仅当对一切$x \in A$，有$m \prec x$.

例 11 设X是一个非空集，$P(X)$是X的所有子集所成的集类(称$P(X)$是X的幂集)，那么$(P(X), \subset)$是一个半序集. 如果$\mathscr{A}$是X的子集所成的任何集类，那么$\cup\{A | A \in \mathscr{A}\}$是$\mathscr{A}$的一个上界，$\cap\{A | A \in \mathscr{A}\}$是$\mathscr{A}$的一个下界.

为了证明一些数学分支中的许多重要结果，援引集论中称为Zorn引理的基本公理是必要的. 我们现在叙述这个引理，以后还对它作些注释.

Zorn 引理 假设X是一个半序集，如果它的每一个全序子集有一个上界，那么X有一个极大元.

本书中有两处必须用这个公理. 在第三章§2，我们用它证明每一个线性空间有一个Hamel基. 在第四章§5，重要的Hahn-Banach延拓定理的证明，要再次用到这个引理.

Zorn引理直观上似乎是不显然的，要求读者作为集合论的公理接受它. 如果期望证明某些存在性类型的结果，这个公理是有力的.

我们注意，可以证明Zorn引理等价于集合论的另外两个公理：(1)选择公理，(2)良序原理. 为了我们的目的，出于技术的原因，采用Zorn引理是最好的. 对三个公理的等价性有兴趣的读者可查阅列入文献目录的P. C. Suppes著的书.

习 题 1

1．证明：当且仅当 $C\subset A$ 时，集合等式

$$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$$

成立．

2．(i) 证明：

$$\{x\in R\,|\,e^x=0\}=\emptyset.$$

(ii) 确定

$$\{x\in R\,|\,e^x=-1\}\ \text{和}\ \{z\in C\,|\,e^z=-1\}.$$

3．(i) 设 $A_\alpha=(\alpha,\infty)$ 是以 α 为左端点的开区间，即 $A_\alpha=\{x\in R\,|\,\alpha<x\}$．证明 $\cup\{A_\alpha\,|\,\alpha\in R\}=R$．

(ii) 设 $I_n=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，求 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$．

4．对于任何集类 $\{A_\alpha\}$ 与任一集 A，证明

$$A\cup(\cap A_\alpha)=\cap(A\cup A_\alpha),$$

$$A\cap(\cup A_\alpha)=\cup(A\cap A_\alpha).$$

5．证明：对任何集 A, B, C，有 $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$ 成立．其中"×"表示 Descartes 乘积．

6．设 (x, y), (u, v) 是有序对，证明：$(x, y)=(u, v)$ 的充要条件是 $x=u$ 与 $y=v$．

7．证明：在实数集 R 上定义的关系 $<$，它具有传递性，但没有自反性，也没有对称性．

8．设 $x=(x_n)$, $y=(y_n)$ 是实数序列．如果 $x_n-y_n\to 0$，那么定义 $x\sim y$．证明：$\sim$ 是一个等价关系，并指出含有序列 $(1, 1, \cdots)$ 的等价类．

9．设 $\sim$ 是集 X 上的一个等价关系．证明：$E_x=E_y$ 的充要条件是 $x\sim y$，又如 $E_x\neq E_y$，那么 $E_x\cap E_y=\emptyset$．

10．指出下列关系中哪几个是函数：

(i) {(2, 1), (1, 2),(王后, 1),(主教, 2),(王后,3)}

(ii) $\{(z, e^z)\,|\,z\in C\}$,

(iii) $\{(e^z, z)\,|\,z\in C\}$.

11．(i) 设 a、$b\in R$，定义 $f(x)=ax+b$．证明：当且仅当 $a\neq 0$ 时，$f:R\to R$ 是双射的，并绘图说明．

(ii) 设 $a, b, c \in R$, 在 R 上定义 $f(x)=ax^2+bx+c$, 试求 f 为双射的必要充分条件.

12. 设 S 是所有由 0 和 1 两个数字组成的序列的集, 那么 $s\in S$ 表示 $s=(s_1, s_2, \cdots)$, 其中 s_n 或者是 0, 或者是 1. 用反证法证明 S 是不可列的. 即设 S 可列成 $\{s^{(1)}, s^{(2)}, \cdots\}$, 其中 $s^{(1)}=(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \cdots)$, $s^{(2)}=(s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \cdots)$, 等等. 适当改变对角线元素 $s_1^{(1)}, s_2^{(2)}, s_3^{(3)}, \cdots$, 容易构造一个序列 $s\in S$, 使得对一切 $n\in N$, $s\neq s^{(n)}$. 这与假定 S 是可列的矛盾.

从 S 的不可列性推导由所有实数所成的集 R 是不可列的. 作为一个提示,设想把 R 的元素表示成小数.

13. 设 $a<b$, (a, b)是 R 中的开区间. 证明 $(a, b)\sim(0, 1)$. 由此说明, $(0, 1)$与 R 是等势的集,即$(0, 1)\sim R$.

14. 说明 R 中所有无理数的集是不是可列的.

15. 用 $f(x)=x^2$ 定义 $f: R\to R$. 求 $f(\{1, 2\})$和 $f^{-1}(\{1, 4\})$. 并同定理 1(vii)比较.

16. 证明定理 1 的全体.

17. 证明: 当且仅当 f 是单射时,有 $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

18. (i) 设$\mathscr{A}=\{A, \emptyset\}$, 其中 $A\neq\emptyset$. 对于集的包含关系 $\subset$, $\mathscr{A}$ 是不是全序集?

(ii) 设 $\mathscr{A}$ 是集 $\{1, 2\}$ 的所有子集的族,说明集的包含不是 $\mathscr{A}$ 上的一个全序.

§2 实数与复数

在短短的这一节中, 我们汇集了有关数、序列、极限以及级数的一些基本概念, 预计读者已经完全熟悉大多数概念. 我们所希望的是使读者回想起这些基本概念, 而显然不是提供一个初等分析教程.

众所周知,实数系 R 可以从有理数系 Q 构成, 有理数系 Q 又可以从正整数系 N 构成. 这样作虽然有好处,但任务是长的和艰巨的, 通常是采取一个更简单的处理方法, 也就是定义 R 是一个满足上界公理的全序域. 全序域是一个域, 其上定义一个全序关

系$\prec$(见第一章§1)，使得：如果$x\prec y$，就有$x+z\prec y+z$；如果$x\prec y$且$\theta\prec z$，就有$zx\prec zy$. 这里θ表示域的零元. 有理数集Q关于$\leqslant$构成一个全序域，但是Q不满足上界公理，这个公理是实数域R的主要特征.

R的上界公理有时称为完备公理(关于这点，见第二章§2)，它可以表述如下：每一个上有界的非空实数集有一个实的上确界(即最小上界). 详细地说，如果$S\neq\emptyset$, $S\subset R$，且对所有$s\in S$和某一$H\in R$，有$s\leqslant H$，那么存在$M\in R$，满足：(i)对所有$s\in S$, $s\leqslant M$；(ii)任意给定$\varepsilon>0$，存在$s=s(\varepsilon)$，使得$s>M-\varepsilon$. 即M是S的上确界，记为$M=\sup S$或$M=\sup\{s|s\in S\}$.

从上界公理容易得到：如果$S\neq\emptyset$, $S\subset R$，当S是下有界时，那么S有一个最大下界，即下确界，记为$\inf S$.

实变数理论的整个论述，以至于以后整个分析的一大部分，都决定性地依赖于上界公理.

现在，如果我们认为R是没有问题的了，那么就可以容易地构造复数域C. 定义C为$R\times R$，其域运算由下式给出：

$$(x, y)+(x', y')=(x+x', y+y')$$

和

$$(x, y)(x', y')=(xx'-yy', xy'+yx').$$

因为

$$(x, 0)+(x', 0)=(x+x', 0) \text{ 和 } (x, 0)(x', 0)=(xx', 0),$$

所以我们约定$(x, 0)$与实数x等同. 写$i=(0, 1)$，于是有$i^2=i\cdot i=-1$. 因此，如果$z=(x, y)\in C$，那么$z=x+iy$. 这样产生的C不可能成为全序域(见习题2的第2题).

现在我们转向C中的序列. 一个复数序列x是一个函数$x:N\to C$. 于是，对每一个$n\in N$，我们有一个复数$x(n)$与之对应，一般写成x_n. 我们也写成

$$x=(x_n)=(x_1, x_2, x_3, \cdots),$$

用圆括号表示，以免同单纯的集本身 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ 混淆.

有界序列 序列 $x=(x_n)$ 称为有界序列，当且仅当存在 $M\geqslant 0$，使得对所有 $n\in N$ 有 $|x_n|\leqslant M$. 所有有界序列的集用 l_∞ 表示.

收敛序列 序列 $x=(x_n)$ 称为收敛的(具有极限 l)，当且仅当对每一个 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$ 使得对所有 $n\geqslant N$，有 $|x_n-l|<\varepsilon$. 记为 $x_n\to l(n\to\infty)$ 或 $\lim x_n=l$. 所有收敛序列的集用 c 表示.

上极限与下极限 设 $x\in l_\infty$ 是有界实数序列，我们定义 x 的上极限和下极限分别为

$$\limsup x_n=\inf_{k\geqslant 1}(\sup_{n\geqslant k} x_n),$$

$$\liminf x_n=\sup_{k\geqslant 1}(\inf_{n\geqslant k} x_n).$$

因为 x 是有界的，$\limsup x_n$ 与 $\liminf x_n$ 是有限的实数. 从它们的定义，我们直接得到下列性质：如果 $x, y\in l_\infty$，

$$\begin{aligned}\liminf x_n+\liminf y_n&\leqslant\liminf(x_n+y_n)\\&\leqslant\liminf x_n+\limsup y_n\\&\leqslant\limsup(x_n+y_n)\\&\leqslant\limsup x_n+\limsup y_n.\end{aligned}$$

显然，如果对所有 n，$x_n\leqslant y_n$，那么 $\limsup x_n\leqslant\limsup y_n$，与 $\liminf x_n\leqslant\liminf y_n$.

Cauchy 序列 序列 $x=(x_n)$ 称为 Cauchy 序列，当且仅当 $|x_n-x_m|\to 0\ (m,\ n\to\infty)$，即对所有 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，使得对所有 $n, m>N$，有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$. 所有 Cauchy 序列的集用 $\mathscr{C}$ 表示.

c、$\mathscr{C}$ 与 l_∞ 之间有下列关系：

定理 2 $c=\mathscr{C}\subset l_\infty$，$\mathscr{C}$ 是 l_∞ 的真子集.

证明 $c\subset\mathscr{C}\subset l_\infty$ 以及严格的 $\mathscr{C}\subset l_\infty$ 是显然的. 需要证明的是 $\mathscr{C}\subset c$. 这可通过上极限和下极限的性质得到，它的根子仍是上

界公理．事实上，我们能证明：$\mathscr{C}\subset c$ 等价于上界公理．

为了证明 $\mathscr{C}\subset c$，我们只考虑实数序列．因为复数序列的情形可从下述事实直接得到：

$$|\mathrm{Re}(z)|\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|,$$

其中 $z=x+iy\in C$，$x=\mathrm{Re}(z)$，$y=\mathrm{Im}(z)$．设 $(x_n)\in\mathscr{C}$，那么 $|x_n-x_m|<1$，$n, m\geqslant N(1)$．因此 $|x_n|<1+|x_N|$，$n\geqslant N$，即 $x\in l_\infty$．因为 x 是实数序列，$\limsup x_n$ 和 $\liminf x_n$ 存在．对所有 $\varepsilon>0$，存在 N，使得

(1) $x_n<x_m+\varepsilon$，$n, m\geqslant N$，

(2) $x_n>x_m-\varepsilon$，$n, m\geqslant N$．

固定 $m\geqslant N$，在 (1) 中取上极限 $\limsup x_n$，在 (2) 中取下极限 $\liminf x_n$，得到

$$\limsup x_n\leqslant x_m+\varepsilon,\quad \liminf x_n\geqslant x_m-\varepsilon.$$

因此
$$0\leqslant\limsup x_n-\liminf x_n\leqslant 2\varepsilon.$$

又由于 ε 的任意性，所以 $\limsup x_n=\liminf x_n=l$．由此容易得到 $x_n\to l$．

$\mathscr{C}\subset c$ 有时称为复数的 Cauchy 原理，一般形式的 Cauchy 收敛序列的概念，在第二章 § 2 讨论完备度量空间时再介绍．

众所周知，无穷级数的理论在分析中是非常重要的．这里，我们观察一两个在今后需要的简单事实，并且建立记号．关于无穷级数实际是什么，那是相当混乱的．但是大家都知道，只要在实际运算中不出错误它就没有多大关系．不过，既然有机会，我们将定义(复数项)级数是一序列对 (a, s)，其中 $a=(a_n)=(a_1, a_2, \cdots)$ 是给定的，而 $s=(s_n)$ 与 a 的关系用下式给出：$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$．不过通常，我们按习惯写为 $\sum a_k$ 来代替 (a, s)，并使用"级数 $\sum a_k$"这样的语言．我们约定 k 是从 1 到"无穷大"．

根据级数的这个定义，一个收敛级数应该定义为一个满足

$s\in c$ 的对(a, s). 这样,所有收敛级数的集可写为$\{(a, s)|s\in c\}$. 然而,按照惯例,我们定义所有收敛级数的集 γ 如下:

$$\gamma=\{a=(a_k)\,|s\in c\}=\{a\,|\sum a_k\text{ 收敛}\}.$$

按照习惯的但不恰当的用法,我们也用 $\sum a_k$ 表示级数 $\sum a_k$ 的和,即当 $a\in\gamma$ 时, $\sum a_k=\lim s_n$, 当且仅当 $a\in\sim\gamma$ 时,称级数 $\sum a_k$ 是发散的.

利用定理 2, 我们看到 $a\in\gamma$ 的充要条件是: 对每一个 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)$, 使得对所有 $n>N$ 以及所有 $p\geqslant0$, 有

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon.$$

$a\in\gamma$ 的这个判别准则, 通常称为级数的一般收敛原则. 取 $p=0$ 时,就是当 $a\in\gamma$ 时有 $a_n\to0$, 即 $\gamma\subset c_0$, 这里 c_0 表示收敛于零的所有序列的集.

当级数 $\sum|a_k|$ 收敛时, 那么称级数 $\sum a_k$ 是绝对收敛的. 通常记为 $\sum|a_k|<\infty$.

我们定义所有"绝对收敛级数"的集如下:

$$l_1=\{a=(a_k)\,|\sum|a_k|<\infty\}.$$

一般收敛原则表明: $l_1\subset\gamma$, 因此, 总起来有

$$l_1\subset\gamma\subset c_0\subset c=\mathscr{C}\subset l_\infty.$$

这里所有包含$\subset$都是严格的.

为什么我们用 l_∞ 表示有界序列,用 l_1 表示绝对收敛级数? 其理由是: 当 $0<p<\infty$ 时,定义

$$l_p=\{a=(a_k)\,|\sum|a_k|^p<\infty\}.$$

那么 l_1 是 l_p 当 $p=1$ 的情形. 在本书的后面将表明序列的集合 l_p 是令人感兴趣的. $p=\infty$ 的情形还稍有些孤立. 不过, 我们注意到 $a\in l_p$ 等价于$(\sum|a_k|^p)^{1/p}<\infty$. 然后,如果对某个 $p>1$, $a\in l_p$, 那么可以证明

$$\lim_{p\to\infty}(\Sigma|a_k|^p)^{1/p}=\sup|a_k|.$$

但 $a\in l_\infty$ 等价于 $\sup|a_k|<\infty$，因此 l_∞ 可以看作 l_p 的极限情形. 这样，至少说明了记号 l_1 和 l_∞ 中 1 和 ∞ 的用意. 至于使用记号 l 的理由没有谈及，因为它仅对数学史家有兴趣.

习 题 2

1. (i) 假定对 R 上界公理成立. 证明每一个有下界的非空实数集有一个最大下界.

(ii) 设 $x, y\in l_\infty$ 是实数序列. 证明:

$$\inf x_n+\inf y_n\leqslant\inf(x_n+y_n)\leqslant\sup(x_n+y_n)\leqslant\sup x_n+\sup y_n$$

并且举一个上式中严格不等式全部成立的例子.

(iii) 证明

$$\limsup x_n=\lim_k(\sup_{n\geqslant k}x_n)$$

和

$$\liminf x_n=\lim_k(\inf_{n\geqslant k}x_n)$$

以及

$$\liminf x_n\leqslant\limsup x_n.$$

(iv) 证明 $\limsup x_n=l$ 的充要条件是: 对每一个 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，使得对所有 $n\geqslant N$，$x_n<l+\varepsilon$，并且对无穷多的 n，$x_n>l-\varepsilon$.

(v) 证明 $x_n\to l$ 的充要条件是

$$\liminf x_n=\limsup x_n=l.$$

2. 我们知道 C 是一个域. 假定 C 在某个全序关系 $\prec$ 下是一个全序域. 试通过在全序关系 $\prec$ 下考察 i 和 0 导出矛盾.

3. (i) 证明收敛序列的极限是唯一的.

(ii) 证明 $c\subset\mathscr{C}\subset l_\infty$，并且 $\mathscr{C}\subset l_\infty$ 是严格包含关系.

(iii) 用 $x_n=1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$ 定义 x，用上界公理证明 $x\in c$. 并证明序列的极限不是有理数.

4. (i) 证明 $a\in\gamma$ 的充要条件是: $r=(r_n)\in c_0$，其中

$$r_n=\sum_{k=n}^{\infty}a_k.$$

(ii) 证明 $l_1\subset\gamma\subset c_0\subset c\subset l_\infty$ 都是严格包含.

(iii) 设 $\limsup|a_n|^{1/n}=l$. 证明当 $l<1$ 时 $\Sigma|a_n|$ 收敛，当 $l>1$ 时 Σa_n 发散. 当 $l=1$ 时，举例说明 Σa_n 可以收敛，也可以发散.

5. 设 $\sum|a_k|^p<\infty$, $p>0$. 证明当 $q>p$ 时 $\sum|a_k|^q<\infty$, 且

$$\lim_{p\to\infty}(\sum|a_k|^p)^{1/p}=\sup|a_k|.$$

§3 函数序列, 连续性, 可微性

和在§2中一样, 我们试图很快地考察在这节标题中提到的基本概念.

在本书后面, 我们将推广熟知的复变量函数的连续性和解析性的概念. 现在我们回顾这些并陈述两个大家知道的复变量定理,它们在第五章中将要用到.

设 $f:S\to C$, 其中 S 是 C 的子集. 若对每一 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon, z_0)$, 使得当 $z\in S$, $|z-z_0|<\delta$ 时就有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ 成立, 那么称 f 是在 $z_0\in S$ 连续. 这可写为: 当 $z\to z_0$ 时 $f(z)\to f(z_0)$.

通常在区域上定义解析函数, 即在 C 中开连通集上而不是在一般集合上. 于是 $f:D\to C$ 在区域 D 上是解析的,当且仅当对每一个 $z\in D$ 及 $z+h\in D$, 极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}(=f'(z))$$

存在. 这个定义的一个熟悉的但是引人注意的结果是: 函数 f', f'', $\cdots$, $f^{(n)}$, $\cdots$ 也都在 D 上解析.

在整个平面 C 上解析的函数叫做整函数. Liouville 定理表明,有界整函数必是一常数. Liouville 定理的推广形式在第四章证明,并且用它证明第五章中著名的 Gelfand–Mazur 定理.

备作参考, 我们援引 Cauchy 和 Morera 定理 (见 Ahlfors, 1953).

Cauchy 定理 设 f 在一个简单闭曲线 Γ 上以及它的内部解析,那么 $\int_\Gamma f(z)dz=0$.

Morera 定理 设 f 在区域 D 上连续，并假定对 D 中每一简单闭曲线 Γ, $\int_\Gamma f(z)dz=0$, 那么 f 是 D 上的解析函数.

在研究序列的收敛性时，我们经常碰到所研究的序列依赖于一个参变量的情形. 例如序列 (f_n), 其中 $f_n(z)=z^n$, $z\in C$. 一般，我们考虑函数序列 $(f_n(s))$, 这里 $f_n: S\to C$, $n=1, 2, \cdots$, S 是一个任意的集. 当且仅当对每一点 $s\in S$, $f_n(s)\to f(s)$ $(n\to\infty)$ 时，我们说在 S 上 $f_n\to f$ 是逐点的. 详细地说就是：对每一 $s\in S$ 和每一 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon, s)$ 使得对一切 $n\geqslant N$ 有 $|f_n(s)-f(s)|<\varepsilon$. 我们称 f 是 $(f_n(s))$ 在 S 上的逐点极限.

例 12 在 $S=[0, 1]\subset R$ 上定义 $f_n(x)=x^n$. 那么由

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0, 1)\\ 1, & x=1\end{cases}$$

定义的 f 是在 $[0, 1]$ 上 (x^n) 的逐点极限. 注意，虽然每一个 f_n 在 $[0, 1]$ 上连续，但逐点极限在 $[0, 1]$ 上不连续，尽管仅仅在一点处.

如果在 S 上 (f_n) 逐点收敛于 f, 且在上面详细定义中出现的 $N(\varepsilon, s)$ 与 s 无关，那么我们称在 S 上 (f_n) 一致收敛于 f. 显然，在 S 上 (f_n) 一致收敛于 f 的充分必要条件是：对每一 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)$, 它只与 ε 有关而与 s 无关，使得对一切 $n>N$ 和对一切 $s\in S$, 有 $|f_n(s)-f(s)|<\varepsilon$.

例 13 在虚轴上定义 $f_n=(z-n)^{-1}$. 那么在这个轴上，$f_n\to 0$ $(n\to\infty)$ 是一致的. 因为对所有 $n\geqslant 1$ 和所有实数 y, $|f_n(iy)|\leqslant n^{-1}$. 因此，当 $n>\frac{1}{\varepsilon}=N(\varepsilon)$ 时，对一切实数 y, $|f_n(iy)|<\varepsilon$.

显然，如果在 S 上，$n\to\infty$ 时 (f_n) 逐点收敛于 f, 那么在 S 上 (f_n) 一致收敛于 f 的充分必要条件是

$$\sup_{s\in S}|f_n(s)-f(s)|\to 0\quad(n\to\infty).$$

下述表示一致收敛性的 Cauchy 原理常是有用的.

定理 3 设 $f_n: S \to C$, $n=1, 2, \cdots$, 那么 (f_n) 在 S 上一致收敛的充分必要条件是: 对每一个 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)$, 使得对一切 $m, n \geqslant N$, 以及一切 $s \in S$, 有

$$|f_n(s)-f_m(s)|<\varepsilon.$$

证明 如果 (f_n) 在 S 上一致收敛于 f, 那么显然 (f_n) 是 S 上的一致 Cauchy 序列, 即在 S 上, $|f_n(s)-f_m(s)| \to 0 (m, n \to \infty)$ 一致成立. 反过来, 根据定理 2, 对每一个 $s \in S$, $(f_n(s))$ 是收敛的, 于是, 假定对每一个 $s \in S$, $f_m(s) \to f(s) (m \to \infty)$. 因为对每一个 n, $\lim_m |f_n(s)-f_m(s)|=|f_n(s)-f(s)|$, 所以对每一个 $s \in S$ 和每一个 $n>N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, 有 $|f_n(s)-f(s)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. 因此对每一个 $n>N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$,

$$\sup_{s \in S} |f_n(s)-f(s)|<\varepsilon,$$

由此, 当 $n \to \infty$ 时 (f_n) 在 S 上一致收敛于 f.

一致收敛性的两个主要好处在下面的定理中给出.

定理 4 (i) 设每一个 $f_n: S \to C$ 在 $S \subset C$ 上连续. 如果在 S 上 (f_n) 一致收敛于 f, 那么在 S 上 f 连续.

(ii) 设 Γ 是 C 中的可求长 Jordan 弧, 其长为 l. 若在 Γ 上 $f_n: \Gamma \to C$ 连续, 且在 Γ 上当 $n \to \infty$ 时 (f_n) 一致收敛于 f. 那么

$$\int_\Gamma f_n(z) dz \to \int_\Gamma f(z) dz \quad n \to \infty.$$

证明 (i) 任意取 $z, z_0 \in S$. 根据一致收敛性, 存在 N, 使得 $|f(z)-f_N(z)|<\varepsilon$, $|f_N(z_0)-f(z_0)|<\varepsilon$. 因为 f_N 在 z_0 连续, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon, z_0)$, 使得 $|z-z_0|<\delta$ 时有

$$|f_N(z)-f_N(z_0)|<\varepsilon.$$

因此, 由三角不等式, 如果 $|z-z_0|<\delta$, 那么 $|f(z)-f(z_0)|<3\varepsilon$.

所以 f 在任意 $z_0\in S$ 连续.

(ii) 根据(i), f 在 Γ 上连续. 因此结论中出现的所有积分存在. 因为对所有 $z\in\Gamma$ 和 $n\geqslant N$, 有 $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$, 所以对这样的 n, 有

$$\left|\int_\Gamma f_n(z)dz-\int_\Gamma f(z)dz\right|\leqslant\sup_{z\in\Gamma}|f_n(z)-f(z)|l\leqslant\varepsilon l,$$

这就证明了(ii).

关于复值函数级数的一致收敛性,我们定义 $\sum f_k(s)$ 在一个集 S 上一致收敛于 f, 就是对每一个 f_k: $S\to C$, 在 S 上一致地有 $\sum_{k=1}^n f_k(s)\to f(s)\quad(n\to\infty)$.

下面定理给出了级数一致收敛性的比较粗糙但很有用的检验法.

定理 5 (Weierstrass M-检验法) 设 f_n: $S\to C$, $\sum M_k<\infty$, 且 $|f_k(s)|\leqslant M_k$ 对一切 k 和 $s\in S$ 成立. 那么级数 $\sum f_k$ 与 $\sum|f_k|$ 在 S 上一致收敛.

证明 对 $n\geqslant1$, $p\geqslant0$ 以及一切 $s\in S$, 有

$$\left|\sum_n^{n+p}f_k(s)\right|\leqslant\sum_n^{n+p}|f_k(s)|\leqslant\sum_n^{n+p}M_k.$$

从级数的一般收敛原理以及定理 3 推出所要的结果.

例 14 $\sum\frac{z^n}{n^2}$ 在 $|z|\leqslant1$ 上是一致收敛的. 因为在 $|z|\leqslant1$ 上, $\left|\frac{z^n}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$, 且 $\sum\frac{1}{n^2}<\infty$.

习 题 3

1. 证明§3例12中的 x^n 收敛于 f 是逐点收敛但不是一致收敛. 证明在 $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ 上它是一致收敛的.

2. 在 $[0,1]$ 上定义 $f_n(x)=(1+nx)^{-1}$. 证明在 $[0,1]$ 上 (f_n) 是逐点收敛但不是一致收敛. 证明 $xf_n(x)\to0\ (n\to\infty)$ 在 $[0,1]$ 上是一致的.

3. 在 R 上定义 $f_n(x)=x(1+nx^2)^{-1}$. 证明在 R 上, $f_n\to 0$ $(n\to\infty)$是一致的. 对 $x\in R$ 讨论等式 $\lim_n f'_n(x)=0$ 的正确性.

4. 设 $p>1$. 证明 $\sum zk^{-p}(1+k|z|^2)^{-1}$ 在 C 上一致收敛,其和函数在 C 上连续.

5. 设 f_n: $\{z||z|<1\}\to C$, $n=1, 2, \cdots$ 是解析的, 且在 $\{z||z|<1\}$ 上 $f_n\to f$ $(n\to\infty)$是一致的. 用定理 4(ii), Cauchy 定理以及 Morera 定理证明 f 在 $\{z||z|<1\}$ 上解析.

6. 证明满足条件: 在 C 上 $|f(z)|\leqslant 1$, $|f(0)|>|f(1)|$ 的一切整函数 f 的集是空集.

7. (Abel 极限定理) 设 $\sum a_k$ 收敛于 s. 证明 $\sum a_kx^k$ 在$[0, 1]$上一致收敛,并推证当 $x\to 1$-时, $\sum a_kx^k\to s$.

(提示: 记 $s_{n,p}=a_nx^n+\cdots+a_px^p$, 应用 Abel 部分和得到: 对一切 $n\geqslant N(\varepsilon)$, $p>n$ 以及 $x\in[0, 1]$, 有 $|s_{n,p}|\leqslant\varepsilon$. 然后运用定理 3 和定理 4(i).)

§4 不 等 式

现在证明一些简单的不等式, 我们在以后的各章中将随意地使用它们.

[1] (三角不等式) 对任何 $a, b\in C$, $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

证明 因为 $|\mathrm{Re}(z)|\leqslant|z|$ 对任何 $z\in C$ 成立, 所以结论可由下式得出:

$$|a+b|^2=(a+b)(\bar{a}+\bar{b})\leqslant|a|^2+|b|^2+2|ab|.$$

[2] $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$ 对任何 $a,b\in C$ 成立.

证明 考虑 $f(t)=t(1+t)^{-1}$, $t>-1$. 由于 $t>-1$ 时 $f'(t)=(1+t)^{-2}$, 因此 f 是增函数. 根据三角不等式, 于是有

$$f(|a+b|)\leqslant f(|a|+|b|)$$

且 $$f(|a|+|b|)=\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

[3] 设 $p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$. 那么 $ab\leqslant\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$,

当且仅当 $a^p=b^q$ 时等式成立.

证明 考虑 $f(t)=1-\lambda+\lambda t-t^{\lambda}$, 其中 $\lambda=\frac{1}{p}$, $t\geqslant 0$. 那么当 $0<t<1$ 时, $f'(t)<0$, 当 $t>1$ 时 $f'(t)>0$. 因此 $f(t)\geqslant f(1)=0$, 并且仅当 $t=1$ 时等式成立. 于是有

$$t^{\lambda}\leqslant(1-\lambda)+\lambda t,\ t\geqslant 0. \tag{1}$$

如果 $b=0$, 那么 $ab=0\leqslant\frac{a^p}{p}$. 如果 $b>0$, 在(1)中令 $t=a^pb^{-q}$ 就得到我们要的结果.

[4] (Hölder 不等式) 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, a_1, $\cdots$, $a_n\geqslant 0$ 以及 b_1, $\cdots$, $b_n\geqslant 0$. 那么

$$\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q} \tag{2}$$

以及

$$\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\max b_k. \tag{3}$$

证明 (2)式称为 Hölder 不等式. 不等式(3)是显然的, 它可以看作 Hölder 不等式在 $p=1$ 时的情形.

为证明(2)式, 令

$$A=(\sum a_k^p)^{1/p},\quad B=(\sum b_k^q)^{1/q},$$

其中 $\sum$ 是从 $k=1$ 到 $k=n$ 求和. 如果 $AB=0$, 那么或者 $A=0$ 或者 $B=0$. 在这两种情形我们都有(2)式两边等于 0. 现设 $AB>0$, 那么根据上面[3]中的不等式, 有

$$\frac{a_k}{A}\cdot\frac{b_k}{B}\leqslant\frac{a_k^p}{pA^p}+\frac{b_k^q}{qB^q},$$

由此得 $\sum a_kb_k\leqslant\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)AB=AB$, 这就是(2)式.

从证明容易看出, Hölder 不等式中的等式成立, 当且仅当有一个常数 M 使得

$$a_k^q = Mb_k^q, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

[5] (Minkowski 不等式) 设 $p \geqslant 1, a_1, \cdots, a_n \geqslant 0$ 和 $b_1, \cdots, b_n \geqslant 0$. 那么

$$\left(\sum (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum b_k^p\right)^{1/p},$$

其中 $\sum$ 是从 $k=1$ 到 $k=n$ 求和.

证明 $p=1$ 的情形是显然的. 假设 $p>1$. 为简便起见, 省略下标 k, 根据[4]中的 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}\sum (a+b)^p &= \sum a(a+b)^{p-1} + \sum b(a+b)^{p-1} \\ &\leqslant \left(\sum a^p\right)^{1/p}\left(\sum (a+b)^p\right)^{1/q} \\ &\quad + \left(\sum b^p\right)^{1/p}\left(\sum (a+b)^p\right)^{1/q},\end{aligned}$$

由此立即可得 Minkowski 不等式.

[6] 设 $0<p \leqslant 1$, $a_1, \cdots, a_n \geqslant 0$ 和 $b_1, \cdots, b_n \geqslant 0$. 那么

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^p + \sum_{k=1}^{n} b_k^p.$$

证明 只要证明不等式 $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$ 对 $0<p \leqslant 1$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ 成立就够了. 为此, 我们考虑

$$f(t) = 1 + t^p - (1+t)^p, \quad t \geqslant 0.$$

取导数, 我们得到 $t \geqslant 0$ 时 $f(t) \geqslant 0$, 即 $(1+t)^p \leqslant 1 + t^p$. 如果 $b=0$, 那么 $(a+b)^p = a^p + b^p$; 如果 $b>0$, 在 $(1+t)^p \leqslant 1+t^p$ 中令 $t = \dfrac{a}{b}$ 即可得到所要的结果.

由不等式[1]. [5]和[6]可得到下列常用的对复数 a_k, b_k 也成立的结果:

$$\left(\sum |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |b_k|^p\right)^{1/p} \quad (p \geqslant 1),$$

$$\sum |a_k + b_k|^p \leqslant \sum |a_k|^p + \sum |b_\nu|^p \quad (0<p \leqslant 1).$$

习 题 4

1. 设 $b \neq 0$, 证明 $|a+b| = |a| + |b|$ 的充分必要条件是有一个实常数

$p \geqslant 0$, 使得 $a=pb$.

2. 设 $p \geqslant 1$, 证明

$$\left(\sum_1^n |a_k|\right)^p \leqslant n^{p-1} \sum_1^n |a_k|^p.$$

3. 设 $1<p<\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 如果 $a \in l_p$, $b \in l_q$, 证明 $ab \equiv (a_k b_k) \in l_1$. 当 $a \in l_1$, $b \in l_\infty$ 时, 有 $ab \in l_1$ 吗?

4. 假设 $1 \leqslant p<\infty$, $a \in l_p$, $b \in l_p$, 令

$$\|a\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p}.$$

证明 $a+b \equiv (a_k+b_k) \in l_p$ 以及 $\|a+b\| \leqslant \|a\|+\|b\|$.

5. 假设 $0<p_k \leqslant 1$, $k=1, 2, \cdots$, 并设 $\sum |a_k|^{p_k}<\infty$, $\sum |b_k|^{p_k}<\infty$, 证明 $\sum |a_k+b_k|^{p_k}<\infty$ 和对于每一个固定的 $\lambda \in C$, $\sum |\lambda a_k|^{p_k}<\infty$.

6. 设 $a \in l_p$, $0<p<1$, 证明 $\sum |a_k| \leqslant (\sum |a_k|^p)^{1/p}$.

第二章　度量空间与拓扑空间

§1　度量空间与半度量空间

在实变量和复变量理论中，有许多结果是依赖于实数和复数的代数性质的. 例如研究幂级数——这在复变量理论中是很基本的. 在组成多项式 $a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 时，就要用到复数的加法和乘法这些纯代数的概念. 当然，另外还要引进一个分析的概念，即取这样一个多项式的极限(当 $n\to\infty$)才得到一个幂级数. 但是，在初等分析中有许多结果就其本质来说，不依赖于实数或复数的代数结构，这些结果主要包含两个数 x 和 y 之间的距离的概念.

当我们推广距离的概念，使它适用于任意集合的对象时，并不要求这个集合有任何代数结构，虽然在特殊的集合，如实数和复数集合，有“自然的”距离函数，它用到代数运算. 分析中有些基本概念实际上是度量(或距离)概念，作为一个例子，我们考虑函数 f 在点 x_0 的极限 l，这个极限的定义只用到 x 与 x_0 以及 f 与 l 之间的距离. 从这个极限概念出发，引出了连续函数和收敛序列的重要理论.

在本章我们讨论度量空间和拓扑空间的一些基本理论，这些理论只限于基本的以及在后面的赋范空间一章中要用的那些内容.

就实数(或复数)空间有距离或距离函数这一点而言，度量空间是它的自然推广. 当我们用大多数人会同意的与几何直观完全一致的方法适当地定义一个度量空间后，就有关于函数的极限、连续性、集合的有界性、收敛序列等方面的结果，但是没有象收敛级数(举例说)方面那样的结果. 因为级数包括元素的加法，而在一般

的度量空间里是没有代数运算的．当然也有一些定义了代数运算的度量空间——这在后面几章中加以讨论，暂时我们只讨论最一般的情况．

拓扑空间是度量空间的自然和重要的推广．正如我们在后面要看到的，度量空间中的距离函数产生称为开集的一类集合，而用来定义一个拓扑空间的就是这些开集的基本性质．

下面我们给出精确定义：

度量空间　度量空间是由一个非空集合 X 和一个度量(或距离)函数 $d: X\times X\to R$ 组成的对 (X, d)，其中 d 满足以下条件：对于 X 中任意 x, y, z，有

(M1)　$d(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(M2)　$d(x, y)=d(y, x)$；

(M3)　$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$.

注(i) 度量函数是定义在 X 的元素对上的实值函数．重要的是应当注意到它必是非负的．d 非负是因为由(M3)，

$$d(x, y)+d(y, x)\geqslant d(x, x),$$

然后，由其他两个公理可知 $2d(x, y)\geqslant 0$，因此对 X 中所有的 x, y, $d(x, y)\geqslant 0$.

(ii) 由公理很容易推出一个值得注意的不等式

$$|d(x, y)-d(x', y')|\leqslant d(x, x')+d(y, y').$$

(iii) 对度量空间 (X, d) 的任一个子集 S，当我们把 d 限制在 $S\times S$ 上，S 可认为是一个度量空间，于是称 S 为 (X, d) 的子空间．当度量 d 固定在 X 上后，我们常常不严格地把 X 作为度量空间，但我们心里应总记住度量空间实际上是对 (X, d)，而不只是集合 X.

度量空间的公理(M1)—(M3)有时被称为 Hausdorff 公设，它是以杰出的德国数学家 F. Hausdorff(1868—1942)命名的．

公理(M3)通常称为三角不等式 因为它是对复数 x, y, z 成立，在几何上很明显的不等式

$$|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z|$$

的推广.

下面我们举一些度量空间的例子.

例 1 每一个非空集合 X 能用相当平凡的方法，即定义

$$d(x, x)=0 \quad \text{和} \quad d(x, y)=1 \quad \text{当 } x \neq y$$

来构成一个度量空间. 容易验证公理(M1)—(M3)是成立的. 按这种方式定义的度量 d 称为 X 上的平凡度量. 例如，我们能在实数集 R 上用一个平凡度量来代替通常的模度量. 但是，这样就没有我们所知道的实变量理论了. 平凡度量主要用处是对一些不成熟的断言或推广提供反例.

例 2 实变量理论主要是研究具有"自然"度量 $d(x, y)=|x-y|$ 的实数集 R. 一般度量空间的 Hausdorff 公设确实隐含着实数模的基本性质.

复数集 C 的自然度量是 $d(z, w)=|z-w|$. 这里 $|z|$ 指 C 中复数 z 通常的模.

例 3 在正整数集合 $N=\{1, 2, \cdots\}$ 中加上一个元素 ∞，并记 $N'=N \cup \{\infty\}$，定义

$$d(m, n)=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|, \text{ 对 } m, n \in N,$$

$$d(m, \infty)=d(\infty, m)=\frac{1}{m}, \text{ 对 } m \in N,$$

$$d(\infty, \infty)=0.$$

那么容易验证(N', d)是一个度量空间. 虽然乍看起来可能觉得这个度量有点怪，但 d 有一个优点，即当我们考虑象"$n \to \infty$"这样一类的陈述时，∞ 确实在 N' 中. 这一点将在下面 § 4 中进一步讨论，在那里，我们介绍度量空间中函数在一点的极限的概念.

例 4 用 R^n 表示 n 维欧氏空间，其中 n 是正整数，即 R 是所有有序 n 元组 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ (x_i 是实数)的集合，它具有度量

$$d(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (x, y \in R^n).$$

读者可以自己验证 Hausdorff 公设成立——用第一章的 Minkowski 不等式可以得到(M3).

注意 $R^1=R$, 即具有“自然”度量 $d(x, y)=[(x_1-y_1)^2]^{\frac{1}{2}}=|x_1-y_1|$ 的实数全体.

n 元组的集合上其他一些度量有 c 和 e:

$$c(x, y)=\max\{|x_i-y_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

$$e(x, y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.$$

我们给出以下不等式供参考:

$$c(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant \sqrt{n}\, c(x, y),$$

$$c(x, y) \leqslant e(x, y) \leqslant nc(x, y),$$

$$d(x, y) \leqslant e(x, y) \leqslant \sqrt{n}\, d(x, y).$$

用同样的方法，我们可以把所有复的 n 元组的集合 C^n 度量化.

例 5 (i) 设 c 是复数项 x_n 的收敛序列 $x=(x_n)$ 组成的空间. c 中的“自然”度量定义为

$$d(x, y)=\sup_n|x_n-y_n|,$$

其中 $x=(x_n)$, $y=(y_n)$ 是 c 中的序列. 由于收敛序列是有界的，所以 $\sup|x_n-y_n| \leqslant \sup|x_n|+\sup|y_n|$ 是有限的，因此函数 d 有定义. (M1)—(M2)是很容易验证的，下面验证(M3). 对每个 n,

$$|x_n-z_n| \leqslant |x_n-y_n|+|y_n-z_n| \leqslant d(x, y)+d(y, z),$$

因此 $\sup|x_n-z_n| \leqslant d(x, y)+d(y, z)$. 这就是(M3).

(ii) 在 c 中，定义

$$d(x, y) = |\lim(x_n - y_n)|.$$

那么由极限和模的性质容易看到(M2)和(M3)是成立的，但(M1)不完全成立．因为虽然 $d(x, x)=0$，但我们不能从 $d(x, y)=0$ 得出 $x=y$．例如 $x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=0$ $(n\geqslant 1)$．因此，尽管它几乎是 c 上的一个度量，但还不是．在许多更重要的例子中都很自然地出现这种情况，这就促使我们给出比度量空间稍一般的空间的定义．

半度量空间　半度量空间 (X, d) 是由非空集合 X 和一个称为半度量的函数 $d: X\times X\to R$ 组成的，其中 d 满足：对 X 中任意的 x, y, z，有 $d(x, x)=0$；$d(x, y)=d(y, x)$；$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$．

度量空间和半度量空间之间的区别只在于，后一种空间里不同元素的度量可以是零．对有些情况来说，我们是在度量空间还是在半度量空间上讨论是无关紧要的；通常我们讨论度量空间，因为在某个定义或证明中究竟要不要求(M1)成立是清楚的．

下面我们叙述将一个半度量空间转化为一个度量空间的标准方法．

定理 1　设 (X, d) 是一半度量空间，定义 $x\sim y$ 为 $d(x, y)=0$，那么～是 X 上一个等价关系．设 E_x 是含 x 的那个等价类，$E=\{E_x | x\in E\}$，那么

$$\rho(E_x, E_y)=d(x, y)$$

在 $E\times E$ 上有意义，且 (E, ρ) 是一个度量空间．

证明　证明是简单的，这里只给出要点．由半度量空间的公理可以推出～是一个等价关系．比如由 $x\sim y$，$y\sim z$ 可得到 $d(x, y)=d(y, z)=0$，因为 d 是非负的，所以有 $0\leqslant d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)=0$，即 $d(x, z)=0$，$x\sim z$．现在我们从 E_x 中选出 x，从 E_y 中选出 y 来定义 $X\times X$ 上的 ρ，必须证明 ρ 与这些元素的选

法无关．如果 $x'\in E_x$, $y'\in E_y$, 那么 $x\sim x'$, $y\sim y'$, 因此由

$$|d(x, y)-d(x', y')|\leqslant d(x, x')+d(y, y'),$$

得出 $d(x, y)=d(x', y')$．所以 ρ 是有意义的．最后，我们要验证(M1)—(M3)．以(M1)为例，如果 $E_x=E_y$, 那么 $x\sim y$, $d(x, y)=0$, $\rho(E_x, E_y)=0$．反过来，如果 $\rho(E_x, E_y)=0$, 那么 $d(x, y)=0$, $x\sim y$, 从而 $E_x=E_y$．这里我们用到了以下事实：$E_x=E_y$ 的充要条件是 $x\sim y$．(M2)，(M3)的证明留作练习．

虽然由以上过程，确实可从半度量空间出发得到一个度量空间，但是必须注意，这个度量空间的元素即等价类比原来空间的元素复杂得多．

例 6 熟悉 Lebesgue 积分的人会觉得下面的例子是值得花时间去讨论的．设 $L=L[0, 1]$ 是 $[0, 1]$ 上 L-可积函数 f 的集合，那么

$$\int_0^1 |f(x)|dx<\infty.$$

我们定义

$$d(f, g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx \quad (f, g\in L).$$

它是 L 上的半度量，但不是度量．因为 $d(f, g)=0$ 只包含 $f=g$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处成立．根据上面定理，当且仅当 $d(f, g)=0$ 即 $f=g$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处成立时，$f\sim g$．因此 L 可认为是一个度量空间，它的元素是函数的等价类，这里 $g\in E_f$ 意味着 $g=f$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处成立．

例 7 闭区间 $[0, 1]$ 上实连续函数 $x=x(t)$ 的集合组成一个重要的度量空间．因为 x 的模是连续的，根据实变量理论中熟知的定理可知它是有界的，并能达到它的界．因此我们取自然度量为

$$d(x, y)=\max\{|x(t)-y(t)|\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\},$$

其中 x, y 在 $[0, 1]$ 上是连续的．我们记这个度量空间为 $C[0,1]$．

另一个$[0, 1]$上连续函数组成的集合的度量是

$$\rho(x, y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt,$$

其中积分是指通常实分析中的 Riemann 积分，不象例 6 中的 Lebesgue 积分的情形，在这里，由于函数的连续性，我们有：如果 $\rho(x, y)=0$，那么 $x=y$ 即 $x(t)=y(t)$ 对 $[0, 1]$ 中的一切 t 成立．这相当于以下断言：如果 $f=f(t)$ 连续，且

$$\int_0^1 |f(t)|dt=0,$$

那么在$[0, 1]$上$f\equiv 0$．证明留作练习．

注 当然，在例 6 和例 7 中，我们能用$[a, b]$代替$[0, 1]$，不过这除了记号$L[a, b]$，$C[a, b]$不同外，几乎得不到什么新的结果．

例 8 下面给出序列度量空间的例子．序列度量空间是指无穷序列 $x=(x_n)$（x_n 是复数）的集合用相当自然的方法所形成的度量空间．正如将要看到的，许多序列空间的定义方法本身就决定了我们用来定义度量的方式．Hausdorff 公设的详细证明这儿不给出，建议学生自己作出．

空间 s s 表示所有可能的序列 $x=(x_n)$ 的空间．因为 s 是一个相当杂乱的集合，因此它没有明显的度量可取．最普通的一种是

$$d(x, y)=\sum \frac{|x_n-y_n|}{2^n(1+|x_n-y_n|)} \quad (x, y\in s).$$

其中和是从 1 取到 ∞．这里我们按习惯只写 $\sum$ 而不写出极限．因子 2^{-n} 是保证这级数收敛的．我们还能用 n^{-2} 代替 2^{-n}．(M1)—(M2)是显然的．(M3)可以从第一章的公式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{a}{1+|a|}+\frac{b}{1+|b|}$$

得到．

空间 l_∞ 这是指所有有界序列 $x=(x_n)$ 的空间，具有度量

$$d(x, y)=\sup_n|x_n-y_n|.$$

空间 c, c_0 这两个是 l_∞ 的子集，它们具有 l_∞ 的度量. c 是收敛序列的空间，c_0 是零序列($x_n\to 0$)的空间. 对于 c_0 空间(不是 c) 的度量，我们实际上可用 $\max|x_n-y_n|$ 代替 $\sup|x_n-y_n|$，其证明是一个容易的习题.

空间 $l(p)$ 这个空间不象上面一些空间，它的起源相当新. 虽然可以认为它不太复杂，但它还没有得到充分研究(见后面线性度量空间一章).

为了定义 $l(p)$，我们先取一个有界序列 $p=(p_k)$，其中 p_k 是严格正数，$0<p_k\leqslant\sup p_k=H<\infty$，那么

$$l(p)=\{x=(x_k)\mid\sum|x_k|^{p_k}<\infty\}.$$

正如下面证明的，$l(p)$ 上一个自然的度量是

$$d(x, y)=(\sum|x_k-y_k|^{p_k})^{\frac{1}{M}},$$

这里 $M=\max(1, H)$. (M1)—(M2)是显然的. 对于(M3)，利用第一章的不等式

$$|a_k+b_k|^{t_k}\leqslant|a_k|^{t_k}+|b_k|^{t_k}, \tag{*}$$

这里 $t_k=\frac{p_k}{M}\leqslant 1$. 由(*)及第一章中的 Minkowski 不等式，因为 $M\geqslant 1$,

$$(\sum|a_k+b_k|^{p_k})^{\frac{1}{M}}\leqslant(\sum|a_k|^{p_k})^{\frac{1}{M}}+(\sum|b_k|^{p_k})^{\frac{1}{M}},$$

这样，取 $a_k=x_k-y_k$, $b_k=y_k-z_k$, 我们就有 $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$，这就是(M3).

空间 l_p 它是 $l(p)$ 的一个特殊情况，我们应注意这两个不同的记号. l_p 定义为 $l(p)$ 当 (p_k) 是常数时的情况. 如通常那样，对所有的 k，记 $p_k=p$. $l(p)$ 的序列 $p=(p_k)$ 与 l_p 的数 p 这两者之间应当不会发生混淆. 说明白些，对于 $p>0$，l_p 就是所有使 $\sum|x_k|^p<\infty$ 的序列的集合. 当 $p\geqslant 1$ 时，因为 $M=p$，所以 l_p 的度量是

$$d(x,\ y)=(\sum|x_k-y_k|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

当 $0<p<1$ 时，因为 $M=1$，所以距离是

$$d(x,\ y)=\sum|x_k-y_k|^p.$$

空间 l_2 这正好是 l_p 当 $p=2$ 时的情形. 正如我们在第六章要看到的，这是一个特别重要的空间，因为 l_p 空间中只有它是 Hilbert 空间.

在分析中还有许多其他有用的序列度量空间，其中有些将在习题和以后各章中给出.

最后我们举一个复变量理论中的例子.

例 9 (i) 设 A 是所有在 $|z|<1$ 内解析，在 $|z|\leqslant 1$ 上连续的复函数 f 组成的集合. 根据最大模原理，可知 $|f|$ 在 $|z|\leqslant 1$ 的边界上取最大值，因此我们定义度量为

$$d(f,\ g)=\max_{|z|\leqslant 1}|f(z)-g(z)|=\max_{|z|=1}|f(z)-g(z)|,$$

其中 $f,\ g\in A$.

(ii) 设 I 是所有整函数 f 的集合，即 f 在所有 z(有限)上解析，如多项式，e^z，$\sin z$ 等等. 如果我们记

$$M_n=\max_{|z|=n}|f(z)-g(z)|\quad (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

那么
$$d(f,\ g)=\sum\frac{M_n}{2^n(1+M_n)}$$

是 I 上的度量(参看上面空间 s).

以上这些例子足以说明度量概念的一般性质，并说明在分析中感兴趣的许多集合都可以用很自然的方法形成度量空间.

习 题 1

1. 在度量空间 $(X,\ d)$ 中，证明

$$|d(x,\ y)-d(x',\ y')|\leqslant d(x,\ x')+d(y,\ y'),$$

并证明：如果 $d(x_n,\ x)\to 0$，$d(y_n,\ y)\to 0$ $(n\to\infty)$，那么

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y) \quad (n \to \infty).$$

2. 详细验证 Hausdorff 公设对于平凡度量空间(本章例 1 定义的)是成立的.

3. 设(X_1, d_1), (X_2, d_2)是度量空间, $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$属于乘积集合 $X_1 \times X_2$, 并定义

$$d(x, y)=\max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)).$$

问$(X_1 \times X_2, d)$是否构成度量空间?

4. 证明本章例 8 中的空间 s 是一个度量空间, 并证明

$$\sup d(x, y)=1,$$

这里上确界是对 s 中一切元素 x, y 取的. (从几何上来看, 这就是说空间 s 的直径为 1.)

5. 设 X 是所有序列 $x=(x_n)$ 的集合, 对任意复数 z, 记 $g(z)=\min(1, |z|)$. 定义

$$d(x, y)=\sum \frac{1}{n^2} g(x_n-y_n) \quad (x, y \in X).$$

证明(X, d)是一个度量空间, 并且证明

$$\sup d(x, y)=\frac{1}{6}\pi^2,$$

这里上确界是对 X 中一切 x, y 取的. 将此题与上题比较.

6. 验证本章例 7 的连续函数空间 $C[0, 1]$ 是一个度量空间. 并验证本章例 9 的空间 A 和 I 也是度量空间.

7. 证明本章例 4 所列的不等式.

8. 详细给出本章定理 1 证明中余下的部分.

9. 设 γ 是"收敛级数"的集合, 明确地说是指 $\gamma=\{x=(x_k),\ x_k \in C \mid \sum x^k$ 收敛$\}$. 证明(γ, d)是一个度量空间, 具有

$$d(x, y)=\sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} (x_k-y_k) \right| \quad (x, y \in \gamma).$$

10. 设 BV 是所有 $x=(x_n)$的集合, 其中 x_n 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n-x_{n+1}| < \infty. \qquad (*)$$

BV 中的元素 x 称为有界变差(BV)序列. 用定义级数的条件(*) 来定义 BV 上的自然度量. 证明

$$l_1 \subset BV \subset c.$$

并证明 BV 和 γ 相交但相互不包含, 这里 γ 是第 9 题中所指的.

11. 设 n 是一个固定的正整数，X 是所有复元素的 $n\times n$ 阶矩阵

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

组成的集合．对 X 中的 A, B, 定义

$$d(A,\ B)=\max\{|a_{ij}-b_{ij}|\,|1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n\},$$

$$\rho(A,\ B)=\max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}-b_{ij}|\,|1\leqslant i\leqslant n\right\}.$$

证明$(X,\ d)$，$(X,\ \rho)$是度量空间．

§2 完备度量空间

早在初等实变量理论中，我们就已经知道实数的完备性公设和实数的距离概念一样，对实变量理论的发展起了很重要的作用．完备性公设通常以下列形式表出，并称为“上界公理”．

实数的完备性公理 1 每一个有上界的非空实数集合有一个实的上确界(即最小上界)．

如果为了推广的目的而取上面这样的公理来定义一类类似于实数空间的度量空间，那是徒劳的．因为在一般度量空间里，没有两个元素之间的序的概念，而在上面这个完备性公理中则无疑要用到它．但是，我们能证明下面的公设(它在性质上纯粹是度量的)是等价于上述公理的．

实数的完备性公理 2 每一个实数 Cauchy 序列(x_n)收敛于一个实数．即如果当 n, $m\to\infty$ 时，$|x_n-x_m|\to 0$，其中 $x_n\in R$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，那么存在一个 $x\in R$，使当 $n\to\infty$ 时 $|x_n-x|\to 0$．

下面我们将模仿实数的公理 2 来定义一般的完备度量空间．首先必须给出在一个度量空间中的 Cauchy 序列和收敛序列的明确的定义．

Cauchy 序列 一个序列 $(x_n)=(x_1,\ x_2,\ \cdots)$，其中所有 $x_n\in$

X，称为在度量空间(X,d)中的 Cauchy 序列，当且仅当

$$d(x_n, x_m)\to 0 \quad (n, m\to\infty).$$

即对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，使得对一切 $n, m>N$，

$$d(x_n, x_m)<\varepsilon$$

成立.

Cauchy 序列的名称是以伟大的法国数学家 A. L. Cauchy (1789—1857)命名的，他被认为严格分析的创始人．有些作者用基本序列而不用 Cauchy 序列这名称——我们用的是 Cauchy 序列.

收敛序列 (X,d)中的序列(x_n)称为收敛于 x，当且仅当存在$x\in X$，使得 $d(x_n, x)\to 0\ (n\to\infty)$．这时，我们记 $x=\lim x_n$ 或 $x_n\to x$，并称 x 为序列(x_n)的极限.

符号 $x=\lim x_n$ 和 $x_n\to x$ 显然有个缺点，即它们本身没有反映是在一个给定度量空间(X, d)上的收敛．我们强调的是，这些符号是不能孤立取的——必须根据上下文弄清极限是在哪个空间上取的．如果发生混淆时，通常我们就说"依 X 的度量 d, $x_n\to x$"而不只说"$x_n\to x$".

避免这个问题最好的办法是用 $\lim x_n=x(X, d)$ 来代替 $\lim x_n=x$，但是大多数数学家似乎认为这是没有必要的.

我们还要强调，当(x_n)收敛时，它的极限一定属于 X(参看本节例 10).

在收敛序列的定义里，我们说的是(x_n)的极限，而不是(x_n)的一个极限．极限的这种唯一性明白表示在下面命题中.

定理 2 (i) 收敛序列有唯一的极限.

(ii) 每一个收敛序列同时也是一个 Cauchy 序列，但逆命题一般不成立.

(iii) 如果一个 Cauchy 序列有一个收敛的子序列，那么原序

列是收敛的.

证明 (i) 如果依度量 d, $x_n\to x$, 同时有 $x_n\to y$, 那么由三角不等式(M3),

$$0\leqslant d(x,\ y)\leqslant d(x,\ x_n)+d(x_n,\ y)\to 0\quad(n\to\infty).$$

因此 $d(x,\ y)=0$, 再由(M1)得 $x=y$, 即极限是唯一的. 注意如果 d 只是一个半度量, 那么我们不能从 $d(x,\ y)=0$ 得出 $x=y$ 的结论.

(ii) 设(x_n)是收敛的, 比如说 $x_n\to x$, 那么由(M1)—(M3)(以后引用时不再说明),

$$\begin{aligned}0\leqslant d(x_n,\ x_m)&\leqslant d(x_n,\ x)+d(x,\ x_m)\\&=d(x_n,\ x)+d(x_m,\ x)\to 0\quad(n,\ m\to\infty),\end{aligned}$$

即 $d(x_n,\ x_m)\to 0\ (n,\ m\to\infty)$, 也就是说$(x_n)$是 Cauchy 序列. 要说明 Cauchy 序列不一定是收敛序列, 只要给出一个存在不收敛的 Cauchy 序列的度量空间的例子就行了.

例 10 取 $X=(0,\ 1)$为 R 的一个子空间, 即把 X 本身看作具有模度量的度量空间. 那么$\left(\frac{1}{n}\right)$是 X 中的 Cauchy 序列, 但它在 X 中不收敛. 因为

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\to 0\quad(n,\ m\to\infty),$$

$\left(\frac{1}{n}\right)$收敛于 0, 但是 0 不在 X 中. 更明确地说, 我们知道在 R 中 $\frac{1}{n}\to 0$, 0 是它唯一的极限, 因此$(0,\ 1)$中就不能再有点是它的极限.

(iii) 设(x_n)是 Cauchy 序列, (x_{n_k})是收敛的子序列, 我们可以把它表示为$(x_{n_k})=(x_{n_1},\ x_{n_2},\ \cdots)$其中 $n_1<n_2<n_3<\cdots$, n_i 是正整数, 而且当 $k\to\infty$ 时, 依度量 d, $x_{n_k}\to x$, 因此有

$$0\leqslant d(x_n,\ x)\leqslant d(x_n,\ x_{n_k})+d(x_{n_k},\ x),$$

只要取 n 和 k 足够大，就能使不等式右端的值任意小．因此 $d(x_n, x)\to 0$．这样 Cauchy 序列 (x_n) 收敛于收敛子序列 (x_{n_k}) 的极限.

我们将会看到，定理 2 中的(iii)在后面是有用的.

记住实数的完备性公理 2，现在我们来定义.

完备度量空间　度量空间 (X, d) 称为完备的当且仅当它的每一个 Cauchy 序列收敛(于 X 中的一个点)．明显地说，如果 $d(x_n, x_m)\to 0\ (n, m\to\infty)$，那么存在 $x\in X$，使得 $d(x_n, x)\to 0\ (n\to\infty)$.

例 11　具有通常模度量的实数集 R 组成完备度量空间．用通常的公理方法研究实数，完备性只是一个公理，即上述公理 2；或者，要是取公理 1 的话，那么公理 2 可由它推得．如果采用构造的方法研究实数，比如说从有理数 Q 开始，那么所构造的集合的完备性必须加以证明．当然 Q 关于模度量是不完备的．例如，序列 1.4, 1.41, 1.414, … 是 Q 中的 Cauchy 序列，但在 Q 中它不收敛，因为它“收敛”于 $\sqrt{2}$，而 $\sqrt{2}$ 不在 Q 中.

例 12　任何一个具有平凡度量的集合 X 形成一个完备空间．因为如果 (x_n) 是 X 中的 Cauchy 序列，由 Cauchy 序列的定义，当 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，则对一切 $n>N=N\left(\frac{1}{2}\right)$，有 $d(x_n, x_{N+1})<\frac{1}{2}$，因此，对这样一些 n，$d(x_n, x_{N+1})=0$，据此，当 $n\to\infty$ 时，显然 $x_n\to x_{N+1}$．这样每一个 Cauchy 序列收敛于 X 的点．实际上在这种情况下，这个点是序列中的一个元素.

前面的一些例子：空间 R^n, c, c_0, $C[0, 1]$, s, l_∞ 和 $l(p)$ 都是完备度量空间．关于它们完备性的证明，都遵循标准的模式．因此我们取实收敛序列空间 $c=c(R)$ 作为典型的例子加以说明.

例 13　实收敛序列空间 $c=c(R)$，具有 $d(x, y)=\sup_i|x_i-y_i|$

其中 $x=(x_i)$, $y=(y_i)$属于 c, 是完备的. 因为如果$(x^{(n)})$是 c 中的一个 Cauchy 序列,那么有

$$d(x^{(n)},\ x^{(m)})\to 0\quad (n,\ m\to\infty).$$

注意序列$(x^{(n)})$的每个元素本身也是序列,即对每个 n,

$$x^{(n)}=(x_i^{(n)})=(x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \cdots)\in c.$$

现在,对每一个 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使 n, $m\geqslant N$ 时, $d(x^{(n)},\ x^{(m)})<\varepsilon$, 即 n, $m\geqslant N$ 时, $\sup_i|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}|<\varepsilon$, 这样, 对 $i=1,\ 2,\ \cdots$ 和 n, $m\geqslant N$, 更加应有 $|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}|<\varepsilon$. 因此对每个 i, 实数序列 $(x_i^{(m)})=(x_i^{(1)},\ x_i^{(2)},\ \cdots)$是 R 中的 Cauchy 序列. 于是, 由 R 的完备性可知它是收敛的,比如说收敛于 x_i, 即对每个 i, 存在

$$\lim_m x_i^{(m)}=x_i.$$

我们在 $|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}|<\varepsilon$ 中固定 $n\geqslant N$, 并令 $m\to\infty$, 对每个 i, 得到

$$|x_i^{(n)}-x_i|\leqslant\varepsilon.$$

这里注意,由于取了极限,不等式减弱了.因为 ε 是不依赖于 i 的,所以有

$$\sup_i|x_i^{(n)}-x_i|\leqslant\varepsilon\quad (n\geqslant N).\tag{*}$$

这就得到 $d(x^{(n)},\ x)\to 0$ $(n\to\infty)$ 其中 $x=(x_i)$. 到此好象已经证完了,因为已经得到了依度量 d, $x^{(n)}\to x$. 然而,我们还必须进一步证明. 因为前面的$(x^{(n)})$可能“收敛”于一个不属于 c 的序列 x,这样根据定义它根本就不收敛,因此我们必须证明 $x\in c$. 要证明 $x\in c$, 较方便的是先证明 x 是一个 Cauchy 序列, 然后再利用 R 的完备性. 由于序列$(x_i^{(N)})\in c$,因此它是一个 Cauchy 序列, 从而

$$|x_i^{(N)}-x_j^{(N)}|<\varepsilon\quad (i,\ j\geqslant M(\varepsilon)).$$

于是,对 i, $j\geqslant M(\varepsilon)$, 由(*)有

$$\begin{aligned}|x_i-x_j|&=|x_i-x_i^{(N)}+x_i^{(N)}-x_j^{(N)}+x_j^{(N)}-x_j|\\&\leqslant d(x,\ x^{(N)})+|x_i^{(N)}-x_j^{(N)}|+d(x^{(N)},\ x)<3\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 x 是 R 中 Cauchy 序列，从而 $x \in c$.

非完备度量空间的完备化 对一个不完备的度量空间(X, d)，存在一个确定的方法能使它完备. 这个方法实际上用到了实直线 R 的完备性，所以从不完备的有理数集 Q 构造 R 时不能用这种方法. 我们本来希望说明怎样从不完备的有理数集 Q 构造完备的度量空间 R, 可是这个构造是十分困难的，有点超出象本书这样性质教材的内容. 关于从有理数构造实数的方法，叙述得比较好的见 L. W. Cohen 和 G. Ehrlich(1963)的书.

从 R 的完备性出发，将一个一般的不完备的度量空间(X, d)完备化，这是一件比较容易的事. 详细的完备化过程读者可以参考习题 2 的第 7 题.

我们要说明在 Q 到 R 的完备化中出现的一个事实，即有理数在实数集合中是稠密的. 这是指任给实数 $\varepsilon>0$, 和任意实数 x, 总存在一个有理数 q, 使 $|x-q|<\varepsilon$ 成立. 这就是说，对任意给定的一个实数，我们能得到一个与它任意靠近的有理数. 对一般度量空间的稠密概念将在本书后面给出.

习 题 2

1. 在度量空间(X, d)中证明：序列(x_n)收敛的充分必要条件是(x_n)的每个子序列收敛.

2. 在(X, d)中，设三角不等式由公理

$$d(x, z) \leqslant \max(d(x, y), d(y, z))$$

所替代，而 Cauchy 序列的定义不变. 证明(x_n)是 Cauchy 序列的充分必要条件是 $d(x_n, x_{n+1}) \to 0\ (n \to \infty)$.

3. 给出 R 中满足以下条件的序列(x_n)的例子：当 $n \to \infty$ 时，$|x_n - x_{n+1}| \to 0$, 但是(x_n)不是 Cauchy 序列(即不收敛，因为 R 是完备的). 试与上面第 2 题比较.

4. 证明本章例 4—8 中的度量空间 R^n, $C[0, 1]$, s, l_∞ 和 $l(p)$ 是完备的.

5. 如我们已经知道的，实多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在$[0, 1]$上是连续的，所有这样的多项式(次数为一切 n)的集合 P 组成 $C[0, 1]$的子空间. 证明 P 不是完备的. 提示，考虑 e^x 的级数的部分和，并注意到: 依 $C[0, 1]$的度量，$x_n\to x$ 实际上意味着在$[0, 1]$上 $x_n(t)\to x(t)$是一致收敛.

6. $l_1=\{x|\sum|x_n|<\infty\}$的自然度量是

$$d(x, y)=\sum|x_n-y_n|.$$

因为 $l_1\subset l_\infty$，所以我们能取非自然的度量

$$\rho(x, y)=\sup_n|x_n-y_n|.$$

证明(l_1, d)是完备的，而(l_1, ρ)是不完备的.

7. 设(X, d)是不完备的，用下面的提示来证明存在一个完备的度量空间(Y, ρ)，X 作为一个稠密子集等距地被嵌在这个空间中. 符号 $x=(x_n)$，$x'=(x'_n)$表示 X 中的序列.

(i) 由 x, x' 是(X, d)中的 Cauchy 序列，可以得出$(d(x_n, x'_n))$在 R 中收敛.

(ii) X 中所有 Cauchy 序列组成的集合为 $\mathscr{C}$，在 $\mathscr{C}$ 中定义 $\rho_1(x, x')=\lim_n d(x_n, x'_n)$，那么$(\mathscr{C}, \rho_1)$是半度量空间.

(iii) 利用本章§1定理1，把$(\mathscr{C}, \rho_1)$作成度量空间(Y, ρ).

(iv) 设 $Y_0\subset Y$ 是这么定义的: $E\in Y_0$ 是指 E 含一个常数序列 $x_c=(x_1, x_1, \cdots)$. 那么 Y_0 等距于 X，即 $\rho(E, E')=d(x_1, x'_1)$，其中 E 含 x_c，E' 含 x'_c.

(v) 证明 $\overline{Y}_0=Y$，即 Y_0 在 Y 中是稠密的(见后面§3稠密集的定义).

(vi) 用(v)来证明(Y,ρ)是完备的. X 的 Cauchy 序列的等价类的空间(Y, ρ)具有度量 ρ，称为(X, d)的完备化集.

§3. 一些度量和拓扑概念

在实分析和复分析中，一个点的邻域概念在许多地方是重要的. 例如，复变函数中开域的概念依赖于邻域的概念. 在 R 中，点 $a\in R$ 的邻域是一个关于 a 的开区间即 $\{x||x-a|<r\}$对某个 $r>0$. 在 C 中，点 $a\in C$ 的邻域是一个开圆(比如说半径为 $r>0$): $\{z||z-a|<r\}$. 注意到在 R(或 C)中定义邻域时只用到 R(或 C)的度量，很自然，我们可以在一般度量空间上定义这个概念.

邻域(开球)　设 (X,d) 是一个度量空间，$a\in X$，那么对于 $r>0$，

$$S(a,\ r)=\{x\in X\,|\,d(a,\ x)<r\}$$

称为以 a 为中心，r 为半径的邻域(或开球).

"球"这个词来源于通常三维空间 R^3. 在一般的度量空间里，"球"已无球的外形了，甚至可能是一个单独的点.

例 14　(i) $S(a,\ r)$是非空的：$a\in S(a,\ r)$.

(ii) 在 C 中，$S(0,\ 1)$是开的单位圆，即 $\{z\,|\,|z|<1\}$.

(iii) 在 $C[0,\ 1]$中，设 θ 表示在 $[0,\ 1]$ 上恒等于零的连续函数，那么 $S(0,\ 1)$是所有界于(严格地)以 x 轴为中心线，宽度为 2 的带形区域里的连续函数的全体.

(iv) 设 X 是具有平凡度量 d 的任意集合. 如果 $0<r\leqslant 1$，那么 $S(a,\ r)=\{a\}$，即只包含 a 的集合. 如果 $r>1$，那么 $S(a,r)=X$，即整个空间.

在进一步讨论含有邻域的一些概念之前，我们要给出在度量空间中讨论有界集用到的几个定义.

距离；直径　设(X,d)是度量空间，A，B 是 X 的子集，定义

$$d(x,\ A)=\inf\{d(x,\ a)\,|\,x\in A\},$$

$$d(A,\ B)=\inf\{d(a,\ b)\,|\,a\in A,\ b\in B\},$$

$$d(A)=\sup\{d(a,\ a')\,|\,a,\ a'\in A\}.$$

称 $d(x,\ A)$ 为点 $x(\in X)$ 与集合 A 之间的距离，$d(A,\ B)$为集合 A 与 B 之间的距离，$d(A)$为集合 A 的直径.

有界集　度量空间中的一个集合 A 称为有界的，当且仅当它有有限的直径，即 $d(A)<\infty$. 否则，称它为无界的.

例 15　(i) 如果 A 是有限的，即 A 只有有限个点，那么 A 显然是有界的，且 $d(A)=\max\{d(a,\ a')\,|\,a,\ a'\in A\}$.

(ii) 如果 $A=(0,\ 1)\subset R$，那么 $d(A)=1$，因为对一切 A 中

的 a, a', 有 $|a-a'|<1$, 且对任给 $\varepsilon>0$, 显然存在 $a, a'\in A$, 使 $|a-a'|>1-\varepsilon$. 注意这个例子中直径不能达到, 即不存在 $a, a'\in A$, 使 $|a-a'|=1$.

(iii) 如果 (x_n) 是 (X, d) 中的 Cauchy 序列, 那么 $\{x_n\}$ 是有界的. 因为存在 N, 使得对于 $n>N$, $d(x_n, x_N)<1$, 对其余的 n, 则有 $M=\max\limits_{1\leqslant n\leqslant N} d(x_n, x_N)<\infty$, 因此 $d(x_n, x_N)<M+1$ 对一切 n 成立. 于是, 对所有的 n, m, 有

$$d(x_n, x_m)\leqslant d(x_n, x_N)+d(x_N, x_m)<2M+2,$$

因此 $d(\{x_n\})\leqslant 2M+2<\infty$.

(iv) c_0 是无界的, 因为我们能找到两个零序列, 它们间的距离可以任意大. 例如 $(0, 0, 0, \cdots)$ 与 $(n, 0, 0, \cdots)$, 对足够大的 n.

(v) 任意一个度量空间 (X, d), 不管有界还是无界, 总能被改造成一个有界的度量空间 (X, ρ), 其中

$$\rho(x, y)=\frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}.$$

当 d 是度量时, 很容易验证 ρ 也是度量——三角不等式可由第一章 §4 的不等式(2)推出.

更简单的例子是 ρ 为 X 上的平凡度量的情况. 当然前面那个 ρ 是与 d 有关的. 事实上, 容易看出 X 中的序列依 d 是收敛的(或是 Cauchy 序列)的充分必要条件是它依 $\rho=\dfrac{d}{1+d}$ 收敛(或是 Cauchy 序列).

现在我们转过来讨论度量空间中的开集概念, 它在讨论有关连续函数的问题时是很重要的, 而且还因为我们进一步由它推广到拓扑空间. 根据德文 Gebiet(即区域), 我们用 G 表示开集, 根据法文 fermé(即闭的), 用 F 表示闭集.

开集 设(X,d)是度量空间，那么$G\subset X$称为开的当且仅当G的每个点有一个包含在G中的邻域. 用符号表示就是：如果$x\in G$，那么存在$r>0$，使$S(x, r)\subset G$.

在复平面上，开集的定义与空间直观相当一致.（为了使度量空间形象化，复平面被认为是特别合适的.）

对一般的度量空间，开球的名称正确地暗示了它是一个开集.

定理 3 $S(a, r)$是开的，其中$a\in(X, d)$，$r>0$.

证明 设$x\in S(a, r)$，则有$d(x, a)<r$. 令$r'=r-d(x, a)>0$，于是得到$S(x, r')\subset S(a, r)$. 因为由$y\in S(x, r')$，可推出

$$d(y, a)\leqslant d(y, x)+d(x, a)<r'+d(x, a)=r,$$

即$y\in S(a, r)$. 因此对$S(a, r)$中每个点x，存在一个球$S(x, r')$包含在$S(a, r)$中.

下面结果中的一部分说明开集的某些组合也是开集. 这个结果特别重要，因为它以后将提供一般拓扑空间定义的模型.

定理 4 设(X,d)是度量空间，那么

(i) $\emptyset$和X是开集.

(ii) 任意一族开集（可列或不可列）的并是开集.

(iii) 有限个开集的交是开集.

证明 (i) $\emptyset$是开集，这乍看起来有点奇怪，因为$\emptyset$没有元素. 有些作者为了容易起见，就定义$\emptyset$为开集. 我们提供一个用反证法的证明，希望它是容易接受的. 假定$\emptyset$不是开集，那么论断的"$\emptyset$的每一个元素有一个以它为中心的球包含在$\emptyset$中"是不成立的. 这就得到以下论断，这个论断的开始是："存在$\emptyset$的元素，使得…"，…表示这论断的其余部分，是我们不感兴趣的. 这样就产生了矛盾，一方面我们要求"存在$\emptyset$的一个元素"，另一方面"$\emptyset$没有元素". 因此$\emptyset$必是开集.

X 为开集是因为由 $x \in X$，可推出有一个球比如 $S(x, 1) \subset X$.

(ii) 如果 $x \in \bigcup G_\alpha$(α 取遍某个指标集)，那么对某个 α，$x \in G_\alpha$，于是存在 $S(x) \subset G_\alpha$. 当我们对 r 不感兴趣时，用 $S(x)$ 来表示 $S(x, r)$. 因此 $S(x) \subset G_\alpha \subset \bigcup G_\alpha$. 这样，由 x 在并中可以推出 $S(x)$ 在并中，所以并是开集.

(iii) 只须证明两个开集的情况，然后用归纳法得到 n 个开集的情况. 设 G_1, G_2 是开的，如果 $I = G_1 \cap G_2$ 是空的，由(i)即得 I 是开集. 当 $I \neq \emptyset$ 时，取 $x \in I$，那么由 $x \in G_1$, $x \in G_2$，可推出对某个 r_1, r_2，有 $S(x, r_1) \subset G_1$ 以及 $S(x, r_2) \subset G_2$，显然 $S(x, r) \subset I$，这里 $r = \min(r_1, r_2)$.

例 16 (i) $\cap \left\{\left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right) i=1, 2, \cdots\right\} = \{0\}$ 在 R 中，所以可列个开集的交不一定是开集，因为 $\{0\}$ 不是开集(参看定理 4(iii)).

(ii) 在 R 中有许多集合不是开的. 如 $\{x\}$, $[0, 1]$, $(0, 1]$.

(iii) 与(ii)相反，如果 (X, d) 是平凡空间，那么 X 的每个子集是开的. 因为如果 $A \subset X$, $a \in A$，那么 $S(a, 1) = \{a\} \subset A$. 即 A 是开的.

上面(ii)中的区间$[0, 1]$，在初等分析中称为闭区间，它不是开集，但这并不表示"闭"可以解释为"不开". 现在我们要用"闭"这个词来描述在一般度量空间中的某些集合，而不只是直线上的区间. 观察 $\sim[0, 1] = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$，它是开集的并(由定理 4(ii)，它是开的). 我们看到闭区间$[0, 1]$的余集是开的. 由此引出了下面的定义：

闭集 (X, d)中的集合称为闭的当且仅当它的余集是开的.

由这个定义和对余集的 De Morgan 定律，我们有：

定理 5 （i）X 和 $\emptyset$ 是闭的，(ii)闭集的交是闭的，(iii)有限个闭集的并是闭的.

例 17 （i）对于平凡空间 X，每一个 $A\subset X$ 是闭的. 这是因为 $\sim A\subset X$，于是由上面例 16(iii) 可知 $\sim A$ 是开的. 因此平凡度量空间的每个子集既是开的又是闭的.

(ii) 在 R 中 $[0, 1)$ 既不是开的又不是闭的.

(iii) 在任何度量空间中，"闭球" $\{x|d(x, a)\leqslant r\}$ 是闭集. 因为容易验证 $\{x|d(x, a)>r\}$ 是开集.

闭集的概念与极限点的概念有紧密的联系. 设 S 是 (X, d) 中的集合，x 是 X 的点，不一定是 S 的点. 那么 x 称为 S 的极限点当且仅当 x 的每一个邻域含有异于 x 的 S 的点.

S 的极限点的集合用 S' 表示.

例 18 （i）设 $S=(0, 1)\subset R$，那么 1 是 S 的极限点，但 $1\notin S$. 并且容易看出 $S'=[0, 1]$.

（ii）设 $S=[0, 1]\cup\{2\}$，它是两个闭集的并，因此是闭集（由定理 5 的(iii)）. 我们看到 $S'=[0, 1]$，所以 $S\supset S'$. 最后的这个性质对一般空间中的闭集也是成立的. 更明白地说，我们有

定理 6 度量空间中的集合 F 是闭的当且仅当它包含它的全部极限点. 即 $F\supset F'$.

证明 （i）设 F 是闭的，所以 $\sim F$ 是开的. 如果 $F'=\emptyset$，那么 $F\supset F'$. 如果 $F'\neq\emptyset$，取 $x\in F'$，那么 $x\in F$，因为若不是，则有 $x\in\sim F$. 因为 $\sim F$ 是开的，所以存在 $S(x)\subset\sim F$. 但是 $S(x)\subset\sim F$ 与 $x\in F'$ 是矛盾的.

（ii）设 $F\supset F'$，我们证明 $\sim F$ 是开的. 如果 $\sim F=\emptyset$，那么 $\sim F$ 是开的. 如果 $\sim F\neq\emptyset$，则取 $x\in\sim F\subset\sim F'$，因此 x 不是 F 的极限点. 于是存在 $S(x)\subset\sim F$. 由此得到 $\sim F$ 是开的，即 F 是闭的.

下面，我们引进另外两个术语，我们将看到，它给出了描述开集和闭集的另外的方法.

集合的内部 设S是(X,d)的任意子集，S的内部S°是包含在S内的最大开集:

$$S^\circ=\bigcup_{G\subset S}G,$$

即S的内部是所有包含在S内的开集的并.

集合的闭包 设$S\subset(X, d)$，S的闭包$\bar{S}$是包含S的最小闭集:

$$\bar{S}=\bigcap_{F\supset S}F,$$

即S的闭包是所有包含S的闭集的交.

显然，总有一个开集包含在S中，即$\emptyset$，也总有一个闭集包含S，即X.

下面的结果很容易证明，留作习题.

定理7 (i) 对任何S，有$S^\circ\subset S\subset\bar{S}$.

(ii) S是开的当且仅当$S=S^\circ$.

(iii) S是闭的当且仅当$S=\bar{S}$.

(iv) $\bar{S}=S\cup S'$.

(v) 由$S\subset T$可推出$S^\circ\subset T^\circ$及$\bar{S}\subset\bar{T}$.

度量空间完备性的条件可以用闭球套给出. 对于R中的闭区间，这个概念(即闭区间套)也许已经很熟悉了. 我们先给出定义.

闭球套 闭球套是闭球S_n的序列(S_n)，其中S_n满足$S_1\supset S_2\supset\cdots$，且直径$d(S_n)\to 0$ $(n\to\infty)$.

如果空间X是完备的(没有洞!)我们希望每一个闭球套收缩到一个点，使$\cap S_n\neq\emptyset$，这里交是对$n=1,2,\cdots$取的. 严格地说，我们有

定理 8 设(X,d)是度量空间，那么(X,d)是完备的当且仅当每一个闭球套有非空的交.

证明 我们不详细叙述细节，读者自己去验证每一步. 首先，设 X 是完备的，取任意一个套(S_n)，那么如果 x_n 是 S_n 的中心，我们就有(x_n)是 X 中的 Cauchy 序列，因此 $x_n \to x \in X$. 而且 $x \in \bigcap S_n$. 这是因为取任意 n, x_n, x_{n+1}, $\cdots$ 在 S_n 中，因此 $x \in \bar{S}_n$①，这里 $\bar{S}_n$ 是 S_n 的闭包. 但 $S_n = \bar{S}_n$，因为 S_n 是闭的.

其次，设每个闭球套有非空的交，取任意 Cauchy 序列(x_n). 确定 n_1，使得当 $n > n_1$ 时，$d(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$，设 $S_1 = S[x_{n_1}, 1] = \{x \mid d(x, x_{n_1}) \leqslant 1\}$. 确定 $n_2 > n_1$，使得当 $n > n_2$ 时，$d(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{4}$，设 $S_2 = S\left[x_{n_2}, \frac{1}{2}\right]$，那么 $S_2 \subset S_1$. 如此我们得到 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 和$S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \cdots$，且 $d(S_n) \to 0$. 所以 $\bigcap S_n \neq \emptyset$；实际上 $\bigcap S_n = \{x\}$，即一个单独的点. 显然当 $k \to \infty$ 时，$x_{n_k} \to x$，这样(x_n)有一个收敛的子序列. 由定理 2(iii)，我们有 $x_n \to x$ $(n \to \infty)$，即(x_n)收敛，因此 X 是完备的.

下面这个与闭包有关的概念，以后我们要用到.

稠密集 度量空间(X,d)的子集 S 称为在 X 中稠密的当且仅当 $\bar{S} = X$.

疏朗集 $S \subset X$ 称为在 X 中疏朗的当且仅当 $\bar{S}$ 不包含邻域.

可分离空间 度量空间(X,d)称为可分离的当且仅当它包含一个可列的稠密子集.

例 19 (i) Q 在 R 中是稠密的. 因为 $Q \subset R$，于是由定理 7(v)，(iii)，$\bar{Q} \subset \bar{R} = R$. 我们必须证明 $R \subset \bar{Q}$. 设 $x \in R$，那么对每一个 $\varepsilon > 0$，存在 $q \in Q$，使得 $|x - q| < \varepsilon$，因此 $x \in Q$ 或 $x \in Q'$，

① 参看习题 3 第 13 题.

这样就有 $x\in Q\cup Q'=\bar{Q}$.

(ii) 整数集合 Z 在 R 中是疏朗的. 因为 Z 是闭的($\sim Z$ 是开区间的并), 于是 $\bar{Z}=Z$, 但是显然 Z 不包含邻域.

注意 $\sim Z$ 在 R 中是稠密的.

(iii) R 是可分的,因为 Q 是可列的稠密的子集.

定理 9 以下三种说法是等价的: (i) S 在 X 中疏朗; (ii) $\bar{S}$ 的内部是空的; (iii) $\sim\bar{S}$ 在 X 中稠密.

证明 作为例子,我们只证由(ii)可推出(i),其余留作练习.

假定 $\bar{S}^\circ=\emptyset$, 那么 $\bar{S}$ 不包含邻域, 因为如果它包含邻域, 比如说 $\bar{S}\supset S(a)$, 那么因为 a 属于包含在 $\bar{S}$ 中的开集 $S(a)$, $a\in\bar{S}^\circ$. 但 $a\in\bar{S}^\circ$ 与 $\bar{S}^\circ=\emptyset$ 矛盾.

我们上面定义的许多概念如闭集,内部,闭包,稠密集等等,都是依赖于开集的概念, 开集本身又是根据与度量 d 有紧密关系的邻域来定义的. 然而,如果我们从称为"开"集的集的族出发,这种集族要求满足一定的性质(马上就要规定下来), 那么我们可以完全象在一个度量空间中一样地定义闭集, 内部等等, 但不需用到度量. 根据定理 4,度量空间 (X, d) 中的开集族满足: $\emptyset$, X 是开的,任意个开集的并是开的,任意有限个开集的交也是开的. 我们将用这些性质作为定义一类新的空间的公理,那时,度量空间只是这类新的空间的特殊情况, 度量空间中仅仅用到开集的那些结果仍然成立. 下面就给出这类新空间的精确定义.

拓扑空间 一个拓扑空间是由一个非空的集合 X 以及 X 的满足下列公理的子集的族 T 组成的对 (X, T). 这些公理是:

(T1) $\emptyset\in T$, $X\in T$.

(T2) T 中任意个(可列或不可列)集合的并在 T 中.

(T3) T 中任意有限个集合的交在 T 中.

T 中的集合称为开集,T 称为关于 X 的拓扑.

当我们讨论一般的拓扑空间时，是十分广泛地理解"开集"这个词的. 虽然在度量空间中这个词有特殊的意义，但在一般的拓扑空间中它只是表示满足公理(T1)—(T3)的集合的一个词而已.

例 20 (i) 度量空间是一类特殊的拓扑空间. 开集如以前那样定义，由定理 4, (T1)—(T3)成立.

(ii) 设 X 是任一个非空集合，T 是 X 的所有子集(包括 $\emptyset$)的集合，我们可以把 X 的每一个子集称为开集，(T1)—(T3)成立几乎只是用词的问题. 例如，开集(即 X 的子集)的并是 X 的子集，因此是开集. 这个拓扑称为 X 的离散拓扑，因为只含一个点的集合是开集.

(iii) 与(ii)相反，对任意非空集合 X，取 $T=\{\emptyset, X\}$ 得到的是非离散拓扑. 因此可以说，离散拓扑是 X 上最细致的拓扑，而非离散拓扑是 X 上最粗糙的拓扑.

(iv) 设 X 是三个元素组成的集合 $X=\{x, y, z\}$，并设 $T=\{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$. 立即可以验证$(X, T)$是一个拓扑空间.

(v) 设 X 是实直线，T 是所有开区间(即形如(a, b)的区间)以及 $\emptyset$ 的集合，那么虽然 T 的"开集"在通常意义下是开的，但只要一验证(T2)，就可知(X, T)不是拓扑空间.

如果 d 是 X 上的度量，又设由 d 所产生的 X 中的开集的集合 $\mathscr{G}$，那么$(X, \mathscr{G})$是拓扑空间. 反过来，给定一个拓扑空间(X, T)，自然要问是否存在一个度量，这个度量可以确定拓扑 T.

可度量化空间 拓扑空间(X, T)如果存在一个度量 d，使得 $\mathscr{G}=T$，其中 $\mathscr{G}$ 是由 d 所确定的开集的集合，那么称这个拓扑空间为可度量化的.

例 21 (i) 设 T 是关于任何集合 X 的离散拓扑，那么(X, T)

是可度量化的. 因为平凡度量 d 使得 $\mathscr{G}=T$. 这一点我们在上面例 16(iii) 中基本上已经证明了.

(ii) 假定 X 是多于一点的集合, 设 $T=\{\emptyset, X\}$ 是 X 上的非离散拓扑, 那么 (X, T) 不是可度量化的. 因为假定它是, 即 $\mathscr{G}=T$, 这里 $\mathscr{G}$ 是由度量 d 所确定的开集的集合, 那么取 X 中的 $x, y, x\neq y$, 并确定 $S(x), S(y)$, 使 $S(x)\cap S(y)=\emptyset$(两个邻域的半径可取为 $d(x, y)/2$). 但是我们必须有 $S(x)=S(y)=X$, 因为 $S(x), S(y)$ 是 $\mathscr{G}=T=\{\emptyset, X\}$ 的非空子集, 因此 $S(x)\cap S(y)=X=\emptyset$, 这个矛盾证明了 (X, T) 不是可度量化的.

在例 21 的(ii)中, 我们用到了以下事实: 在一个度量空间中, 对不同的点存在分别含有它们而不相交的开集(实际上是邻域). 一般具有这样分离性的拓扑空间称为

Hausdorff 空间 一个拓扑空间称为 Hausdorff 空间当且仅当对 X 中的任何 $x, y\,(x\neq y)$, 存在两个不相交的开集, 其中一个含 x, 另一个含 y.

还有别的一些分离性公理, 根据这些公理可以定义其它类型的拓扑空间. 但是根据我们的要求, 知道任何一个度量空间是 Hausdorff 空间就足够了. 至于进一步的拓扑概念, 我们需要的很少主要是我们后面介绍的紧致集概念(§ 5). 在下一节中, 我们要定义拓扑空间上的连续和半连续函数以及有关的概念. 在拓扑空间上许多结果的证明并不比在它的特殊情形度量空间上难.

习 题 3

1. 设 $R^2=\{(x_1, x_2)\,|\,x_1, x_2\in R\}$ 具有通常的度量, 证明从原点到半平面 $\{x_1>0\}$ 的距离是零.

2. 给出 R 上可列个闭区间的并不是闭的例子.

3. 在度量空间中, 以 a 为中心, r 为半径的闭球记为 $S[a, r]=\{x\,|\,d(x, a)\leqslant r\}$. 证明

$$\overline{S(a, r)} \subset S[a, r].$$

给出一个例子说明包含关系可以是严格的.

4. 证明第二章§3定理7.

5. 在 R 中用有界单调序列收敛的事实来证明闭区间套原理. 即证明如果 (I_n) 是一个区间套, $I_n=[a_n, b_n]$, 那么 $\cap I_n \neq \emptyset$(参考本章§3定理8).

6. 证明本章§3定理9余下的论断.

7. 证明闭集是疏朗集的充分必要条件为它不包含非空开集.

8. 设 X 是无限集(即 X 有无穷多个点), T 由 $\emptyset$, X 以及所有使 $\sim G$ 为有限集的集合 G 组成. 证明 (X, T) 是一个拓扑空间.

9. 设 R 中 $X=[0, 1)$, T 由 $\emptyset$ 以及所有形如 $[0, a)$(其中 $0<a\leqslant 1$)的集合组成. 证明 (X, T) 是拓扑空间.

10. 证明度量空间是 Hausdorff 拓扑空间.

11. 设 (X, d) 是度量空间, 定义 $\rho=\min(1, d)$. 证明 (X, ρ) 是有界的度量空间, 并且 d 和 ρ 确定相同的拓扑(即由 d 确定的 $\mathscr{G}$ 等于由 ρ 确定的 $\mathscr{G}$).

12. 设 (X, T) 是拓扑空间, S 是 X 的子集. 证明如果 S 的开集定义为形如 $S\cap G$ $(G\in T)$ 的集合, 那么 S 是拓扑空间. 这个关于 S 的拓扑称为导出拓扑.

13. 设 S 是 (X,d) 中的集合, 假定 (x_n) 是 S 中使 $x_n \to x$ $(x\in X)$ 的点列. 分别考虑 $x\in S$ 与 $x\notin S$ 的情况, 用定理7(iv)证明 $x\in \bar{S}$.

§4 度量空间和拓扑空间上的连续函数

我们知道, 在复平面 C 上, 函数 $f: C\to C$ 称为在 z_0 点有极限 l 是指对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon, z_0)>0$, 使 $0<|z-z_0|<\delta$ 时, $|f(z)-l|<\varepsilon$ 成立. 另外 f 称为在 z_0 点连续是指当 $|z-z_0|<\delta$ 时, $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. 这两个定义的区别是, 在第一个定义中, 不要求 l 是 f 在这点的值.

如果我们有度量空间 (X, d), (Y, ρ) 和函数 $f: X\to Y$, 那么我们说 f 在 $x_0\in X$ 有极限 l 是指当 $0<d(x, x_0)<\delta$ 时, $\rho(f(x), l)<\varepsilon$. 同样地, 对于 f 在 x_0 连续, 我们要求当 $d(x, x_0)<\delta$ 时, $\rho(f(x), f(x_0))<\varepsilon$. 上面我们已经省略了"对任意 $\varepsilon>$

0, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)>0$" 这样的话，以后我们也将常常这样做. 当 ε 和 δ 出现时，都假定上面这样的话实际上已有了. 在极限的定义中还必须假定 $l\in Y$.

下面是一种有用的特殊类型的连续.

一致连续 设 (X, d), (Y, ρ) 是度量空间, $f: X\to Y$ 称为 X 上的一致连续函数，当且仅当对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 它只与 ε 有关，使得 $d(x, x')<\delta$ 时，$\rho(f(x), f(x'))<\varepsilon$, 这里 $x, x'\in X$.

显然每一个一致连续的函数也是连续函数；但逆命题一般不成立. 例如，容易证明 $f(x)=\frac{1}{x}$ 是 $(0, 1)$ 上的连续函数，但它不一致连续.

一致连续根本的性质是 $\delta(\varepsilon)$ 只与 ε 有关，而不象通常的连续那样，$\delta(\varepsilon)$ 与某个特定的 $x\in X$ 有关. 在某类集合上，连续函数也是一致连续的. 在 §5 我们将介绍紧致性的概念，并看到对紧致集而言，连续和一致连续是一致的.

例 21 我们考虑 §1 例 3 的空间 (N', d). 在 R 中当 $n\to\infty$ 时，$f_n\to l$ 是表示当 $n>M(\varepsilon)$ 时，$|f_n-l|<\varepsilon$, 而不是表示当 $0<|n-\infty|<\delta$ 时，$|f_n-l|<\varepsilon$. 显然这不符合度量空间中极限的一般定义. 在收敛序列 (f_n) 的极限定义中，符号 ∞ 不出现在序列 (f_n) 收敛条件中. 就其意义而言，符号 ∞ 完全是多余的，因为这是表达上的虚构. 在初等分析课程中没有它，我们也可很好进行讨论，许多令人惊奇的结果都是从它不可理解的性质得出的.

但是，如果我们在 N' 上赋予例 3 的度量 d, 那么我们就能够使 $n\to\infty$ 时，$f_n\to l$ 与 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to l$ 一致. 那时，我们要求对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $0<d(n, \infty)<\delta$ 时，$|f_n-l|<\varepsilon$. 不等式 $0<d(n, \infty)<\delta$ 表示 $n\in N$, $d(n, \infty)=\frac{1}{n}$

$<\delta$, 即 $n>\delta^{-1}$, 或 $n>M(\varepsilon)$, 这里 $M(\varepsilon)=\delta^{-1}$. 因此实数序列依度量 d 的收敛与函数的收敛的叙述是相同的, ∞ 不再占有特殊的地位.

度量空间的连续性定义可以自然地从实直线的情况得到启发. 对于拓扑空间, 如何定义连续函数却不是那么清楚了. 为了定义拓扑空间上连续函数, 我们先在度量空间上建立一个等价的连续函数的定义, 这个定义只包含开集概念. 然后用它来定义一般的情况.

定理 10 $f:(X, d)\to(Y, \rho)$ 在 X 上连续当且仅当 Y 中的每个开集的逆象在 X 中是开的.

证明 (i) 设 f 在 X 上按 ε-δ 意义连续, 我们必须证明如果 $G\subset Y$ 是 Y 中的开集, 那么 $f^{-1}(G)$ 在 X 中是开的. $f^{-1}(G)$ 可能是空集, 这时 $f^{-1}(G)$ 是开的. 如果 $f^{-1}(G)\neq\emptyset$, 取 $x_0\in f^{-1}(G)$, 使 $f(x_0)\in G$. 因为 G 是开的, 所以存在 $S_Y(f(x_0), \varepsilon)\subset G$. 由 f 的连续性, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in S_X(x_0, \delta)$ 时,

$$f(x)\in S_Y(f(x_0), \varepsilon)$$

成立. 即存在 $\delta>0$, 使 $S_X(x_0, \delta)\subset f^{-1}(S_Y(f(x_0), \varepsilon))$. 因为 f^{-1} 是递增的集函数, 最后一个集合 $f^{-1}(S_Y(f(x_0), \varepsilon))\subset f^{-1}(G)$. 因此由 $x_0\in f^{-1}(G)$ 可得到存在邻域

$$S_X(x_0, \delta)\subset f^{-1}(G),$$

于是 $f^{-1}(G)$ 在 X 中是开的.

(ii) 反过来, 设对 Y 中每个开集 G, $f^{-1}(G)$ 是 X 中的开集, 取 $x_0\in X$, 和任意 $\varepsilon>0$, 那么 $f^{-1}(S_Y(f(x_0), \varepsilon))$ 是 X 中的开集. 这样存在 $S_X(x_0, \delta)\subset f^{-1}(S_Y(f(x_0), \varepsilon))$. 因为 $x_0\in f^{-1}(S_Y(f(x_0), \varepsilon))$, 因此对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得由 $x\in S_X(x_0, \delta)$ 可推出 $f(x)\in S_Y(f(x_0), \varepsilon)$, 即 f 按 ε-δ 意义在 X 的每个点 x_0 处连续.

由于定理 10 的启示，现在我们可以定义拓扑空间上函数的连续性.

拓扑空间上的连续函数 设 X, Y 是拓扑空间，那么 $f: X\to Y$ 称为在 X 上连续的当且仅当每个 Y 中的开集的逆象在 X 中是开的.

例 22 (i) 设 X 有离散拓扑，Y 是任一拓扑空间. 那么每一个 $f: X\to Y$ 在 X 上必是连续的. 因为 $f^{-1}(G)$ 是 X 的子集，因此是开的，这里 G 是 Y 中的开集.

(ii) 设 $X=\{x, y, z\}$, $T=\{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$, 于是 (X, T) 是拓扑空间. 定义 $f: X\to X$ 为 $f(x)=x$, $f(y)=z$, $f(z)=y$. 那么考察 T 的集合的逆象，发现 f 不是连续的.

拓扑空间中序列连续的概念有时是有用的. 如果 (x_n) 是拓扑空间 X 中的一个序列，如果对每个包含 x 的开集 G, 存在 $N=N(G)$, 使当 $n>N$ 时，$x_n\in G$, 那么称 (x_n) 收敛于 $x\in X$ (记为 $x_n\to x$).

设 $f: X\to Y$, 这里 X, Y 是拓扑空间，如果对每个序列 $x_n\to x$ (在 X 中)，我们有 $f(x_n)\to f(x)$ (在 Y 中)，那么称 f 在点 $x\in X$ 处序列连续.

定理 11 (i) 如果 $f: X\to Y$ 在 X 上连续，那么 f 在 X 上序列连续. 但逆命题一般不成立.

(ii) 如果 X, Y 是度量空间，那么 X 上的序列连续蕴涵 X 上的连续.

证明 (i) 取任意 $x\in X$ 以及含 $f(x)$ 的任意开集 G. 那么 $f^{-1}(G)$ 含 x, 且为 X 中的开集. 如果 $x_n\to x$, 那么几乎对所有的 n, $x_n\in f^{-1}(G)$, 因此几乎对所有的 n, $f(x_n)\in G$, 即 $f(x_n)\to f(x)$. 因此 f 是在 X 的每一点处序列连续. 对于“逆命题不成立”部分可以参考习题 4 第 14 题.

（ii）设(X, d)，(Y, ρ)是度量空间，f是X上的序列连续函数．假设f有可能在X的某点x处不连续，那么，存在$\varepsilon>0$以及$x_n \in S\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$，使对于$n=1, 2, \cdots$，$\rho(f(x_n), f(x))>\varepsilon$．因此，在$X$中存在一个序列$x_n \to x(\in X)$，使$f(x_n) \nrightarrow f(x)$（在$Y$中），这与$f$在$x$点处是序列连续矛盾．

半连续函数的概念将来要用到，现在我们简略地介绍这一概念．在实直线上，实函数f在x_0连续的条件可以分为两部分：(i) 如果$|x-x_0|<\delta$，那么$f(x_0)-\varepsilon<f(x)$；以及(ii)如果$|x-x_0|<\delta$，$f(x)<f(x_0)+\varepsilon$．因此，当对每个$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$|x-x_0|<\delta$时，$f(x_0)-\varepsilon<f(x)$成立，我们可以定义f为下半连续函数．同样可以定义上半连续函数．对于拓扑空间，我们有

半连续函数　设X是拓扑空间，f: $X \to R$是X上实函数．那么f称为X上的上半连续函数当且仅当对每个实数t，$f^{-1}(-\infty, t)$在X中是开的．即对每个实数t，集合

$$\{x \in X \mid f(x)<t\}$$

是X中的开集．如果$-f$是上半连续函数，称函数f为下半连续函数．

有时，我们用缩写 l. s. c. 和 u. s. c. 来表达下半连续和上半连续．

例 23　（i）如果$X=R$，仿照定理10，容易证明上面的定义等价于下(上)半连续原来的ε-δ定义．

（ii）设$X=l_\infty$，定义$f: l_\infty \to R \cup \{\infty\}$为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-x_{n+1}|.$$

那么f是l_∞上的下半连续函数．在这个例子中，我们允许f取值∞．并由习惯，如果$f(\bar{x})=\infty$，那么称f为在$\bar{x}$处 l. s. c.，假定

对任意的 $\Delta\in(0, \infty)$，存在 $\bar{x}$ 的一个邻域使 $f(x)>\Delta$. 为了证明我们的论断，只要考虑对 $\bar{x}\in l_\infty$, $f(\bar{x})<\infty$ 的情况. 对于 $f(\bar{x})=\infty$ 的情况是一样的. 现在存在 $N=N(\varepsilon)$，使

$$\sum_{n=1}^{N}|\bar{x}_n-\bar{x}_{n+1}|>f(\bar{x})-\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{4N}$，并设 $d(x, \bar{x})<\delta$，其中 d 是 l_∞ 中的度量. 那么

$$\sum_1^N|\bar{x}_n-\bar{x}_{n+1}|\leqslant 2Nd(x, \bar{x})+\sum_1^N|x_n-x_{n+1}|,$$

从而

$$f(x)\geqslant\sum_1^N|x_n-x_{n+1}|>f(\bar{x})-\varepsilon.$$

因此 f 在使 $f(\bar{x})<\infty$ 的那些 $\bar{x}\in l_\infty$ 处下半连续. 不难证明 f 在 l_∞ 上不连续. 事实上，我们能构造元素 $x^{(i)}\in l_\infty$ 的序列，使 $d(x^{(i)}, \theta)=\frac{1}{i}$, $i=1, 2, \cdots$，其中 $\theta=(0, 0, 0, \cdots)$，并使 $f(x^{(i)})=1$ $(i=1, 2, \cdots)$. 因此依 l_∞ 的度量 $x^{(i)}\to\theta$，而 $f(x^{(i)})\not\to f(\theta)=0$. 于是 f 在 θ 处不连续. 这个序列 $(x^{(i)})$ 的构造留作练习.

下面的结果给出了半连续函数的一些性质.

定理 12 设 $f: X\to R$, X 为拓扑空间，那么

(i) f 是连续的当且仅当 f 既是 l. s. c. 又是 u. s. c.

(ii) 由 f, g 是 l. s. c. (u. s. c.) 可推出 $f+g$ 也是 l. s. c. (u. s. c.).

(iii) 由 f_n 是 u. s. c. 在 X 上 $f_n\geqslant f_{n+1}$, $f_n\to f$，可推出 f 是 u. s. c.

(iv) 由 f_n 是 u. s. c.，f_n 在 X 上一致收敛于 f，可推出 f 是 u. s. c.

证明 以(iii)为例. 由 $f_n\geqslant f_{n+1}$ 和 $f_n\to f$，我们可以推断 $f=\inf f_n$. 由假设，对每个 n, $\{x|f_n(x)<t\}$ 对每个实数 t 是开的. 对每个实数 t，我们还有

$$\{x|f(x)<t\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|f_n(x)<t\}. \tag{1}$$

因为如果 x 是在(1)式右端的并中，那么对于某个 n 有 $f_n(x)<t$，这样 $f(x)\leqslant f_n(x)<t$，因此 $x\in\{x|f(x)<t\}$. 反过来，假定 $f(x)<t$，因为 $f=\inf f_n$，可得到存在使 $f_n(x)<t$ 的 n，所以 x 属于(1)式右端的并. 因为 $\{x|f(x)<t\}$ 是开集的并，因此也是开的，从而 f 是 u. s. c.

定理的其余部分可以用同样的方法证明，留作练习.

前面我们定义 $f: X\to Y$ 连续为：当 G 是 Y 中的开集时，逆象 $f^{-1}(G)$ 是 X 中的开集. 如果映射(或函数) $f: X\to Y$ 的象有这种性质，f 就称为

开映射 设 X, Y 是拓扑空间，那么 $f: X\to Y$ 是开映射当且仅当对 X 中的每个开集 G, $f(G)$ 是 Y 中的开集.

将一个拓扑空间中的开集变成另一个拓扑空间中的开集，而且反过来也是这样的函数是特别重要的，称之为

同胚 设 X, Y 是拓扑空间，那么 $f: X\to Y$ 称为同胚当且仅当它是一个双射，并且是双方连续的，双方连续是指 f 和 f^{-1} 都是连续的.

等价地说，f 是同胚当且仅当它是双射的、连续的和开的.

如果 $f: X\to Y$ 是同胚，那么 X 和 Y 作为集合是等势的(f 是双射). 因为 f 和 f^{-1} 保持开集，我们可以认为 X 和 Y 是相同的拓扑空间，即从拓扑的观点看，它们可以认为没有区别.

如果两个拓扑空间之间存在一个同胚，我们就说这两个拓扑空间同胚. 为了用公式表达，如果我们定义 $X\sim Y$ 为 X 和 Y 同胚，那么容易证明 $\sim$ 是一个由所有拓扑空间组成的类上的等价关系.

例 24 开区间 $(0, 1)$ 和整个实直线 R 是同胚的. 适用的同

胚是

$$f(x)=\frac{2x-1}{x(x-1)},\quad x\in(0,\ 1).$$

事实上，f 不仅在 $(0,\ 1)$ 上连续和可微，而且严格递减，因此它是单射的．还有，如果 $y\in R$，那么方程 $y=f(x)$ 可以很快地就 x 解出，并且可以看出 f^{-1} 在 R 上也是连续的．

例 25 本章 §1 例 4 的 $(R^n,\ d)$ 和 $(R^n,\ c)$ 是同胚的．适用的同胚映射是恒等映射 $f: R^n\to R^n$，即对每个 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in R^n$，$f(x)=x$，因为显然 f 是双射的，并由例 4，对所有 R^n 中的 $x,\ y$，

$$c(f(x),\ f(y))=c(x,\ y)\leqslant d(x,\ y)\leqslant\sqrt{n}\,c(x,\ y).$$

因此 $f(=f^{-1})$ 是连续的．

度量空间之间有一类特殊的同胚，它使我们可以把两个度量空间看成是相同的，假如能找到这样的映射的话．

等距映射　设 $(X,\ d)$，$(Y,\ \rho)$ 是度量空间，那么映射 $f: X\to Y$ 称为等距映射当且仅当它是满射的，并且对 X 中所有 $x,\ x'$，有

$$\rho(f(x),\ f(x'))=d(x,\ x').$$

于是，等距映射保持了距离．因为它是单射的（这是因为 $f(x)=f(x')$ 包含 $d(x,\ x')=0$，$x=x'$），它使集合 X，Y 等势．显然 f 是双方连续的，事实上是双方一致连续，因此 f 是同胚．

如果两个度量空间之间存在等距映射，我们就称这两个空间是等距的．如果 $X\sim Y$ 表示 X 和 Y 等距，那么容易证明 $\sim$ 是由所有度量空间所成的集合上的等价关系．

例 26 设 R 是所有实数组成的度量空间，R^* 是所有形如 $f(x)=\alpha x$，$\alpha\in R$ 的函数组成的集合．如果 $f(x)=\alpha x$，$g(x)=\beta x$，我们定义 $d(f,\ g)=|\alpha-\beta|$．容易验证 $(R^*,\ d)$ 是度量空间．现在，R 和 $(R^*,\ d)$ 在映射 $T: R^*\to R$ 下是等距的，T 定义为

$T(f)=\alpha$, 其中 $f(x)=\alpha x$. 这是因为我们有 $|T(f)-T(g)|=|\alpha-\beta|=d(f, g)$.

这个例子看起来似乎有点造作，但它是关于赋范线性空间的对偶空间(第四章)的结果的典型例子. 用第四章的语言，我们刚才证明的是 R 的对偶空间 R^* 与 R 本身是等距的.

我们将讨论度量空间上另一类映射——这类映射在微分方程和积分方程的解的存在性和唯一性问题上有一些重要的应用.

压缩映射 设 (X, d) 是度量空间，那么映射 $A: X\to X$ 称为压缩映射当且仅当存在与 X 中 x, y 无关的数 $c<1$, 使得对 X 中所有 x, y,

$$d(Ax, Ay)\leqslant cd(x, y).$$

在上式中，我们用 Ax 代替 $A(x)$, 其理由马上可以知道. 不管怎么说，这个记号在泛函分析中已被广泛地应用——当然这种表示法在有乘法的内容中容易产生弊病.

压缩映射 A 在 X 上是一致连续的，因为由 $d(x, y)<\frac{\varepsilon}{c}$, 可推出 $d(Ax, Ay)<\varepsilon$.

例 27 设 $f: R\to R$ 是可微的，并假定在 R 上，$|f'(x)|\leqslant c<1$, 那么 f 是 R 上的压缩映射. 这是因为由中值定理，$|f(x)-f(y)|=|f'(a)|\cdot|x-y|\leqslant c|x-y|$, 其中 $x<a<y$.

压缩映射最重要的性质可能是它在完备空间中表现的特点. 即下面的 Banach 不动点原理. S. Banach(1892—1945)是著名的波兰数学家，他是泛函分析的创始人之一.

定理 13 设度量空间 (X, d) 是完备的，又设 A 是压缩映射，那么 A 有唯一的一个不动点，即方程 $Ax=x$ 对 x 有唯一的解.

证明 固定 X 上任意一点，比如说 x_0, 设 $x_1=Ax_0$, $x_2=Ax_1=A^2x_0$, $\cdots$, $x_{n+1}=Ax_n=A^nx_0$. 我们将证明 (x_n) 是 X 中的 Cauchy

序列，因而在 X 中是收敛的，比如说收敛于 x，这个 x 是 $Ax=x$ 的唯一解.

对 $n\geqslant 1$, $p\geqslant 1$, 重复运用压缩映射的条件，然后用三角不等式，得到

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+p}, x_n) &= d(A^{n+p}x_0, A^n x_0) \leqslant c\,d(x_{n+p-1}, x_{n-1}) \\
&\leqslant c^n d(x_p, x_0) \leqslant c^n(d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_0)) \\
&\leqslant c^n(c\,d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + \cdots) \\
&\leqslant c^n d(x_1, x_0)(1+c+c^2+\cdots) \\
&= c^n d(x_1, x_0)(1-c)^{-1}.
\end{aligned}
$$

因为 $c<1$，因此我们有 $d(x_{n+p}, x_n)\to 0(n\to\infty)$，即 (x_n) 是 Cauchy 序列. 根据 X 的完备性，我们有 $x_n\to x$，于是 $x_{n+1}\to x$. 又因为 A 是连续的，由定理 11 可证明 $Ax_n\to Ax$. 在 $x_{n+1}=Ax_n$ 中设 $n\to\infty$，那么我们得到 $x=Ax$.

虽然 x 看起来依赖于开始的那个点 x_0，但事实上它是 $x=Ax$ 的唯一的解. 因为如果 y 是另外一个解，那么 $d(x, y)=d(Ax, Ay)\leqslant c\,d(x, y)$. 由此得出 $d(x, y)=0$，因此 $x=y$.

这个方法的妙处是无论从哪儿开始，我们都能得到唯一的解——虽然我们必须承认最后结果只有在令 $n\to\infty$ 时才能达到. 在数值计算过程中，我们当然必须慎重选择初始点.

例 28 设 f 是 $[a, b]$ 上实可微函数，具有有界导数，并假定 $f(x)=0$ 在 $[a, b]$ 有解，例如 $f(a)\cdot f(b)<0$. 假定对 f' 能找到适当的界，那么可以对 $A(x)=x-\lambda f(x)$ 用压缩的方法，其中 λ 是待选的参数. 因为如果 λ 能选得使 A 是压缩映射，比如说，在 $[a, b]$ 上，$|1-\lambda f'(x)|\leqslant c<1$，那么 $A(x)=x$ 将有唯一的解，于是 $\lambda f(x)=0$ 也有这个解，因此 $f(x)=0$ 有解.

注意，上面的过程中，我们用了闭区间 $[a, b]$ 是 R 中的完备度

量空间这个事实. 这是关于完备度量空间的闭子集一个更一般的结果的特殊情况. 这个更一般的结果是值得提出的(稍稍超出本教材的内容).

定理 14 完备度量空间 X 的闭子空间 F 是完备的.

证明 设(x_n)是 $F\subset X$ 上的 Cauchy 序列,那么它是 X 中的 Cauchy 序列, (x_n) 收敛于 $x\in X$. 但是因为对每个 $\varepsilon>0$, 存在 $x_N\in F$, 使 $d(x_N, x)<\varepsilon$, 所以 $x\in\overline{F}$. 因为 F 是闭的,所以 $x\in F=\overline{F}$, 因此(x_n)收敛于 F 的点,于是 F 是完备的.

有一个与定理 14 有关的结果, 它的大意是度量空间(本身不一定是完备的)的完备子空间是闭的. 这留作练习.

下面的定理是 Banach 不动点原理的一个推论, 它有一定的用处. 它的优点是包含了正整数参数 n, 这个 n 可适应我们手头的问题而选定.

定理 15 设(X,d)是完备的, $A: X\to X$, 如果对某个 $n\geqslant 1$, A^n 是压缩映射,那么 $Ax=x$ 有唯一解.

证明 记 $B=A^n$, 由定理 13, $Bx=x$ 有唯一解 x. 现在 $ABx=Ax$ 且 $AB=BA=A^{n+1}$, 因此 $BAx=Ax$, 这样

$$d(x,\ Ax)=d(Bx,\ BAx)\leqslant c\,d(x,\ Ax).$$

这就包含 $x=Ax$. 至于 x 是 $Ax=x$ 的唯一解, 这是一个很容易的习题.

注意,在定理 15 中没有必要假定 A 是连续的.

例 29 积分方程

$$x(t)=\lambda\int_a^t K(t,\ u)x(u)du+\varphi(t) \tag{2}$$

关于 $x=x(t)$在$[a,\ b]$上有唯一的连续解,这里 λ 是任意参数,φ 在$[a,\ b]$上连续, K 在$[a,\ b]\times[a,\ b]$上连续. 为了证明这一点, 考虑 $A:C[a,\ b]\to C[a,\ b]$, 定义为

$$Ax(t)=\lambda\int_a^t K(t,\ u)x(u)du+\varphi(t).$$

这是有确定意义的，因为由 x 在 $[a,\ b]$ 上连续可推出积分存在，并且是上限 t 的连续函数．现对 $x,\ y\in C[a,\ b]$，容易用归纳法证明在 $[a,\ b]$ 上，

$$|A^n x(t)-A^n y(t)|\leqslant|\lambda|^n M^n m(t-a)^n/n!,\tag{3}$$

其中 $m=d(x,\ y)=\max\{|x(t)-y(t)|\,|a\leqslant t\leqslant b\}$ 是在完备空间 $C[a,\ b]$ 上的度量，M 是 $|K(t,\ u)|$ 在矩形 $[a,\ b]\times[a,\ b]$ 上的最大值．因为在(3)式中 $n!$ 大于所有乘幂，所以我们看到当 n 足够大时，A^n 是压缩映射．因此 $x=Ax$ 关于 x 有唯一的解，即(2)有唯一的解 $x\in C[a,\ b]$．

习　题　4

1．$f,\ g,\ h$ 定义为 $f(x)=2x,\ g(x)=x^2,\ h(x)=\dfrac{1}{x}$，证明 f 在 R 上一致连续；g 在 R 上连续但不一致连续；g 在 $(0,\ 1)$ 上一致连续；h 在 $(0,\ 1)$ 上连续但不一致连续．

2．设 X 是度量空间，$f:N\to X$ 是正整数集 N 上的任意函数．证明 f 在 N 上一致连续．

3．设 $A\neq\emptyset$ 是度量空间 $(X,\ d)$ 的一个给定的子集，如果 $f(x)=d(x,A)$，证明 f 在 X 上一致连续．

4．如本章§4例23最后一部分描述的那样，明显地构造一个序列 $(x^{(i)})\in l_\infty$．

5．证明本章§4定理12的(i)，(ii)和(iv)．

6．设 $X,\ Y$ 是离散拓扑空间．证明 X 和 Y 是同胚的充要条件是它们作为集合是等势的(即基数相等)．

7．证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 定义一个同胚 f：$(0,\ \infty)\to(0,\ \infty)$．证明 f 不保持 $(0,\ \infty)$ 中 Cauchy 序列，即证明存在 $(0,\ \infty)$ 中的 Cauchy 序列 (x_n)，使 $(f(x_n))$ 不是 $(0,\ \infty)$ 中的 Cauchy 序列．

8．举出一个连续而不开的映射 $f:R\to R$ 的例子．

9. 证明 R 中的任何闭区间$[a, b]$, $a<b$, 同胚于$[0, 1]$. 若 $a=b$, 成立否?

10. 设 X, Y 是拓扑空间, 证明 $f: X\to Y$ 是连续的充分必要条件是 Y 中每个闭集的逆象在 X 中是闭的.

11. 证明度量空间的完备子空间是闭的(见本章§4定理14).

12. 设 n 是固定的, 在 R^n 上定义 $\rho(x, y)=\max|x_i-y_i|$. 设 $y=Ax$ 由

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i \quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

定义. 证明 A 是(R^n, ρ)上的压缩映射的充分必要条件是

$$\max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1.$$

13. 假定(a_{ij}), $i, j=1, 2, 3, \cdots$是无限矩阵, 设

$$\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<1.$$

证明方程组

$$x_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j+b_i \quad (i=1, 2, 3, \cdots)$$

有唯一的有界解, 其中(b_i)是有界的.

14. 设 T 由 $\emptyset$ 和 R 中的可列集的余集组成. 证明 T 是关于 R 的一个拓扑. 证明序列(x_n)收敛于在这拓扑中的 x 的充分必要条件是对充分大的 n, $x_n=x$.

还证明: 每一个函数 f: $(R, T)\to(X, T')$, 其中(X, T')是任一拓扑空间, 在 R 的每个点处序列连续. 证明 $f(x)=x$ 在 R 上序列连续, 但不连续.

15. 设 f: $(X, T)\to(X, T')$在 X 上连续, $S\subset X$. 证明 f 在 S 上的限制关于 S 的导出拓扑是连续的(见本章习题3, 第12题).

§5 紧致集

我们考虑一般拓扑空间中的集合, 有些结果特别或只适用于度量空间. 我们所叙述的内容是基本的, 并只涉及某些特别感兴趣的结果——定理的逆定理或部分逆定理几乎都不给出.

粗略地说, 我们可以把拓扑空间中的紧致集看成是实直线上闭区间的推广. 例如, 在 $[a, b]$ 上连续的函数 f 有界并达到其界这一基本定理在拓扑空间上也成立, 假定我们用紧致集 K 代替

$[a, b]$，但仍假定 f 是实值函数.

一般的紧致集的定义是由下面关于实直线的著名的 Heine-Borel 定理启示的（有人不承认 Heine 的功劳而称之为 Borel 定理——不过我们不去关心历史的细节）.

定理 16 设 F 是 R 中的有界闭集，F 的每个开覆盖有有限子覆盖.

证明 对于覆盖的定义，我们在第一章 § 1 已提到过. 开覆盖是指它的集合是开集的覆盖. 有限子覆盖是由开覆盖中有限个开集所组成的.

因为 F 是有界的，因此存在某个闭区间 $I_1=[a, b]\ (a<b)$，使得 $F\subset I_1$. 又因为 F 是闭的，显然如果 I_1 的每个开覆盖包含有限子覆盖，那么 F 的每个开覆盖也包含有限子覆盖[1]. 我们来证明对于 I_1 的定理. 如果定理不成立，那么有一个 I_1 的开覆盖 $\{G_\alpha\}$，它没有有限子覆盖. 将 I_1 平分为两个闭区间 I_2, I'_2，它们中至少有一个没有有限子覆盖，用 I_2 记没有有限子覆盖的那个闭区间. 平分 I_2，得到 I_3，它没有有限子覆盖. 继续这一步骤，我们得到闭区间套 (I_n)，它使得对每个 n, I_n 没有有限子覆盖. 由本章习题 3 第 5 题，$\cap I_n\neq\emptyset$. 选 $x\in\cap I_n$，那么 $x\in I_n\subset I_1\subset\cup G_\alpha$，这就是说，对某个 α, $x\in G_\alpha$. 因为 G_α 是开的，因此存在 $S(x, r)\subset G_\alpha$. 现在取 n 充分大，我们有 $I_n\subset S(x, r)\subset G_\alpha$，因此 I_n 被单个集合 G_α 所覆盖. 这就与 I_n 没有有限子覆盖矛盾了. 于是定理得证.

由定理 16 看来，如果我们称集合 K 为紧致的当且仅当每个 K 的开覆盖有有限子覆盖，那么 R 中每个有界闭集是紧致的. 事实上，这论断的逆也成立，即 R 中每个紧致集是有界闭的（见下面

---

[1] 这个结论的证明如下：设 $\{U_\alpha\}$ 是 F 的一个开覆盖，则 $\{U_\alpha\}$ 与 $\sim F$（F 的余集）一起是 I 的开覆盖. 所以 $\{U_\alpha\}$ 中有有限个集 $U_1, \cdots, U_n$ 可能再加上 $\sim F$ 覆盖 I. 因此 $U_1, \cdots, U_n$ 覆盖 F——译者注.

定理 17)．紧致的定义只包含开集的概念，而不包含限制性的距离的概念．因此，一般我们定义

紧致集 设 X 是拓扑空间，那么 X 的子集 K 称为紧致的当且仅当 K 的每个开覆盖有有限的子覆盖．明白地说，如果 $\{G_\alpha\}$ 是覆盖 K 的一族(可列或不可列)开集，那么存在有限个集合 $G_{\alpha_1}, \cdots, G_{\alpha_n}$ 的族覆盖 K．

下面给出紧致集的一些性质：

定理 17 (i) 在拓扑空间中，有限个紧致集的并是紧致的．

(ii) 紧致集 K 的闭子集 F 是紧致的．

(iii) 在度量空间中紧致集 K 是有界闭的，但其逆一般不成立．

证明 (i) 是容易的，留作练习．

(ii) 为了证明 F 是紧致的，设 $\bigcup G_\alpha \supset F$．我们必须抽出一个有限子覆盖．因为 F 是闭的，所以 $\sim F$ 是开的，于是 $\bigcup G_\alpha \cup (\sim F) \supset K$，因为 K 是紧致的，我们有 $\{G_{\alpha_1}, \cdots, G_{\alpha_n}, \sim F\}$ 覆盖 K，这就蕴涵 $\{G_{\alpha_1}, \cdots, G_{\alpha_n}\}$ 覆盖 F．即 F 有有限子覆盖．

(iii) 我们把证明 K 是闭的留作练习．证明的思想是取 $\sim K$ 中的 p，证明 p 有邻域包含在 $\sim K$ 中，从而证明 $\sim K$ 是开的．

为了证明 K 是有界的，我们在 K 中固定 x，并记

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S(x, i).$$

因为 K 是紧致的，所以有有限个同心球 $S(x, i)$ 覆盖 K，于是 K 就包含在它们中最大的那个里面，因此 K 是有界的．

最后设 (X, d) 是平凡度量空间，那么 X 是有界闭的(除 X 只由一个点组成外，$d(X)=1$)．但是如果 X 有无限多个点，如 $X=\{1, 2, 3, \cdots\}$，那么 X 不是紧致的．因为 X 是开集 $\{1\}$，$\{2\}$，$\cdots$ 的并，而不可能有有限个这样的集合覆盖 X．

现在我们来讨论紧致集上的函数．一个开集的连续象不一定是开的，例如 $G=(-1, 1)$, $f(x)=x^2$．用同样的方法可以看出，对闭集来说也有这个结论．对紧致集，情况就不同了．

定理 18 紧致集 K 的连续象是紧致的．

证明 设 X, Y 是拓扑空间，$f: X \to Y$ 在 X 上连续．由假设 $K \subset X$ 是紧致的，取 $f(K)$ 的开覆盖 $\{G_\alpha\}$，那么，利用在第一章建立的 f^{-1} 的性质，

$$K \subset f^{-1}(\bigcup G_\alpha) = \bigcup f^{-1}(G_\alpha).$$

由此，当我们是就 α 的某个有限组取并时，上面的包含关系仍然成立．取 f 下的映象，我们有

$$f(K) \subset \bigcup f(f^{-1}(G_\alpha)) \subset \bigcup G_\alpha,$$

因此 $f(K)$ 有有限子覆盖．当我们说 $f^{-1}(G_\alpha)$ 是开集时，用到了 f 的连续性．

定理 19 紧致集上的连续实函数是有界的，并达到它的界．

证明 设 $f: X \to R$，这里 X 是拓扑空间，R 有它的通常拓扑．设 $K \subset X$ 是紧致的，由定理 18，$f(K) \subset R$ 是紧致的，因此由定理 17，它是有界闭的．所以 f 的有界性得证．于是存在 $M=\sup\{f(x) \mid x \in K\}$．因此存在 $x \in K$，使 $M-\varepsilon < f(x) \leqslant M < M+\varepsilon$，这就得到 M 是在 $f(K)$ 的闭包中．但 $f(K)$ 是闭的，它等于它的闭包，因此 $M \in f(K)$．即对某个 $x \in K$，有 $M=f(x)$．用同样的方法，可证明达到下确界．

这一结果可以用来度量化 $C(K)$，$C(K)$ 是所有在某个拓扑空间中的紧致集 K 上的连续实函数的集合．其自然度量为

$$d(f, g) = \max\{|f(x)-g(x)| \mid x \in K\},$$

其中 $f, g \in C(K)$．

下面的结果表明，在度量空间中，紧致性是比完备性更强的性质．

定理 20 如果(X,d)是紧致的，那么它是完备的．逆命题一般不成立．

证明 设 X 是紧致的，(S_n)是一个闭球套，那么 $\cap S_n\neq\emptyset$．因为如果交是空的，那么取余集，我们看到这些球中将有一个是空的，而这是不可能的．因此由定理 8，我们得出 X 是完备的．

例子 $X=R$ 说明其逆命题不成立．

现在我们要给出紧致的度量空间另一个更为分析化的描述，这种描述是经常有用的．在此以前，要先给出两个进一步的定义．

序列紧致性　度量空间 X 称为序列紧致的当且仅当 X 中的每个序列有一收敛的子序列．

完全有界性　度量空间 X 称为完全有界的当且仅当对任一 $\varepsilon>0$，存在有限个 ε- 球覆盖 X：

$$X=\bigcup_{i=1}^{n} S(a_i,\ \varepsilon),\quad n=n(\varepsilon).$$

集合 $A=\{a_1,\ \cdots,\ a_n\}$ 称为 X 的有限 ε- 网．

容易看出，完全有界的空间是有界的，但反过来一般是不成立的(参见习题)．

下面我们要说明，在度量空间中，紧致性与序列紧致性是一回事．有些作者，特别是苏联的作者用紧致性这一术语来描述我们这里的序列紧致性．根据我们就要证明的定理来看，这样运用不会产生问题．但是我们用的名词在美国和西欧的数学家中是标准的．

定理 21 一个度量空间是紧致的充分必要条件是：它是序列紧致的．

证明 (i) 首先设空间 X 是紧致的．由定理 20，X 是完备的．由紧致性，我们立即可以推导出完全有界性：用 $\{S(x,\ \varepsilon)\mid x\in X\}$ 覆盖 X，并从中抽出有限子覆盖．

现在设(x_n)是 X 中的序列. 由完全有界性, 存在有限的 1-网, 因而至少有这网中的一个球包含(x_n)的无限子序列$(x_n^{(1)})$. 设这球为S_1, 半径为1. 同样存在有限的 $\frac{1}{2}$-网, 于是存在包含$(x_n^{(1)})$的子序列$(x_n^{(2)})$的球 S_2, 半径为$\frac{1}{2}$. 继续这一过程, 然后考虑子序列$(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, \cdots)$, 因为对 $m, n>N$, 有 $x_n^{(n)}, x_m^{(m)}\in S_N$, 显然, 它是 Cauchy 序列. 因为 X 是完备的, 我们有$(x_n^{(n)})$收敛. 这样我们就证明了 X 是序列紧致的.

(ii) 现在假定 X 是序列紧致的. 首先我们证明 X 一定是完全有界的, 然后用这来证明 X 一定是紧致的.

设 $x_1\in X$, 取 $\varepsilon>0$, 如果对所有 x, $d(x, x_1)<\varepsilon$, 那么$\{x_1\}$是有限 ε- 网. 如果不是这样, 那么存在 x_2, 使 $d(x_2, x_1)\geqslant\varepsilon$. 现在, 如果对所有 x, 不是 $d(x, x_1)<\varepsilon$ 就是 $d(x, x_2)<\varepsilon$, 那么$\{x_1, x_2\}$ 是有限 ε- 网. 否则, 存在 x_3, 使 $d(x_3, x_1)\geqslant\varepsilon$, $d(x_3, x_2)\geqslant\varepsilon$. 这样继续下去, 并假定我们不可能得到一个有限 ε-网, 于是我们有(x_n), 使得对 $m\neq n$, 有 $d(x_n, x_m)\geqslant\varepsilon$. 而$(x_n)$显然没有收敛的子序列, 这与序列紧致性矛盾. 因此我们一定会得到一个有限 ε-网. 即 X 是完全有界的.

现在我们用反证法证明 X 是紧致的. 假定 X 不紧致, 那么存在一个 X 的覆盖 $\{G_\alpha\}$, 它没有有限子覆盖. 因为 X 是完全有界的, 所以对每个 n, 我们有 X 的一个覆盖, 它是由有限个半径为 $\frac{1}{n}$ 的球组成$\left(\text{有限 } \frac{1}{n}\text{-网}\right)$. 因此对每个 $n=1, 2, \cdots$, 至少有 $\frac{1}{n}$-网中的一个球, 称之为S_n, 它不能被 $\{G_\alpha\}$ 的有限多个集合覆盖.

设 x_n 是 S_n 的中心, 那么由 X 的序列紧致性可知(x_n)有收敛的子序列 $x_{n_k}\to x\in X$. 因为 $\{G_\alpha\}$ 覆盖 X, 我们得到, 对某个 α, $x\in G_\alpha$. 这样由 G_α 的开性得出存在 $S(x, r)\subset G_\alpha$. 现在取 k 足够

大，我们能保证 $S\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right)\subset S(x, r)$，因此对某个 α，球 $S_{n_k}\subset G_\alpha$. 这是与以下事实矛盾的：S_{n_k} 不能由 $\{G_\alpha\}$ 中有限多个集合所覆盖. 因此 X 必是紧致的.

我们所考察的紧致集的最后一个性质与在它上面的某种实函数序列的性态有关. 如果我们在度量空间 (X, d) 中取任意一个集合 S 以及连续实函数 $f_n: S\to R$. 那么完全象第一章 §3 定理 4 那样，容易证明，如果在 S 上，f_n 一致收敛于 f，则 f 在 S 上连续. 这个结论反过来一般不成立. 例如在 $[0, 1]$ 上 $f_n(x)=nx(1-x)^n$. 现在我们证明，对紧致的拓扑空间来说，如果收敛是单调的，那么逆命题是成立的.

定理 22 设 X 是紧致的拓扑空间，假定 f_n 在 X 上逐点收敛于 f，这里 f 是 X 上的下半连续函数，每个 f_n 是 X 上的上半连续函数，且设在 X 上 $f_n\geqslant f_{n+1}$. 那么 $f_n\to f$ 在 X 上是一致收敛.

证明 取任意的 $\varepsilon>0$，考虑

$$G_n=\{x\in X\mid f_n(x)-f(x)<\varepsilon\}.$$

因为 f_n-f 是上半连续的，所以 G_n 是开的. 因为 f_n 单调减，所以对每个 n，$G_n\subset G_{n+1}$，并且 $x\in X$ 蕴涵着对所有足够大的 n，

$$0\leqslant f_n(x)-f(x)<\varepsilon.$$

因此 $X=\cup\{G_n|n\in N\}$. 由 X 的紧致性可得出存在 $p(\varepsilon)$，使对每个 $n>p$，

$$X=\bigcup_{n=1}^{p}G_n=G_p\subset G_n.$$

因此 $x\in X$ 蕴涵了对每个 $n>p$，$x\in G_n$，即

$$0\leqslant f_n(x)-f(x)<\varepsilon,\quad 对\ n>p.$$

这就明确地表示在 X 上 f_n 一致收敛于 f.

习 题 5

1. 设 X 是任意集合，F 是 X 的一个子集族. 如果 F 的任一个有限子族有非空交，则称 F 具有有限交性质.

证明：如果 X 是拓扑空间，那么 X 是紧致的充分必要条件是每个具有有限交性质的闭集族有非空的交.

2. 如果拓扑空间的每个可列开覆盖有有限子覆盖，则称拓扑空间为可列紧致的. 证明可列紧致空间的连续象是可列紧致的.

3. 设 $f: X\to R$ 在可列紧致拓扑空间 X(见上面第 2 题)上上半连续，证明 f 在 X 上上有界并且达到界.

4. 设 X 是紧致的度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的序列. 如果 $E_n=\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ 证明 $\{\bar{E}_n\}$ 是一族具有有限交性质(见上面第 1 题)的闭集. 从而证明 X 是序列紧致的(这里给出了本章 § 5 定理 21(i)的另一个证明).

5. 假定 $f: X\to Y$ 是连续的，其中 X 是紧致度量空间，Y 是度量空间. 证明 f 是 X 上的一致连续函数.（提示：由 f 的连续性，存在 $\delta=\delta(\varepsilon, x)>0$. 用以 $\frac{\delta}{2}$ 为半径的诸球 $S\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$ 覆盖 X 并抽出一有限子覆盖.）

6. 在度量空间中证明：完全有界集合是有界的. 用考虑在 l_2 中的 $S=\{e_k\}$, $k=1, 2, \cdots$, 其中 $e_k=(0, 0, \cdots, 1, 0, 0, \cdots)$(1 在第 k 个位置上)来说明一个集合可以是有界但不是完全有界.

§ 6 纲和一致有界性

纲的概念在分析中是很重要的，它的重要性部分体现在关于函数族的一致有界性的推断. 为了具有一般性，我们对拓扑空间定义纲，而在应用方面，我们限于度量空间.

第一纲集合 设 X 是拓扑空间，S 是 X 的子集，S 称为第一纲的集合当且仅当它能表为可列个疏朗集的并.

第二纲集合 S 称为第二纲集合当且仅当它不是第一纲集合，即 S 不能表为可列个疏朗集的并.

注意疏朗的概念对拓扑空间没有明确定义过. 但是如果要求

$A=\sim\bar{S}$ 是稠密的，即 $\bar{A}=X$，那么在度量空间上的定义仍然适用.

例 30 有理数集合 Q 是实数集 R 中的第一纲集合. 因为 Q 是可列个元素 $q_1, q_2, \cdots$ 的并，每个集合 $\{q_i\}$ $i=1, 2, \cdots$ 显然是在 R 中疏朗的.

重要的 Baire 定理告诉我们：每一个完备度量空间（作为本身的子集）是第二纲集合. 这就是下面的定理 24. 我们先建立定理 23，从定理 23，立即得出 Baire 定理.

定理 23 设 X 是完备度量空间，(G_n) 是 X 的稠密开子集序列，那么 $\cap G_n\neq\emptyset$.

证明 取 $x_1\in G_1$，则存在球 $S(x_1)\subset G_1$. 取闭球 $S[x_1, r_1]\subset S(x_1)$. 因 G_2 在 X 中稠密，所以存在 $x_2\in G_2\cap S\left[x_1, \frac{1}{2}r_1\right]$. 因此存在 $S(x_2)\subset G_2$. 我们取闭球 $S[x_2, r_2]$，其半径 r_2 小于 $S(x_2)$ 的半径，且 $<\frac{1}{2}r_1$. 那么 $r_2<\frac{1}{2}r_1$，$S[x_2, r_2]\subset S[x_1, r_1]$ 及 $S[x_2, r_2]\subset G_2$.

继续这一步骤，我们能找到闭球 $S[x_n, r_n]\subset G_n$，它们构成一个闭球套，即 $S[x_n, r_n]\subset S[x_{n-1}, r_{n-1}]$ 且 $r_n\to 0$ $(n\to\infty)$. 因为 X 是完备的，由定理 8 可知，存在 x，使

$$x\in\cap S[x_n, r_n]\subset\cap G_n,$$

因此 $\cap G_n\neq\emptyset$.

定理 24（Baire 纲定理） 完备度量空间 X 是第二纲集合.

证明 假定 X 不是第二纲集合. 那么 X 是第一纲的，

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\left(=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bar{E}_n\right),$$

其中每个 E_n 是疏朗的. 因此，取余集，

$$\emptyset=\cap(\sim\bar{E}_n).$$

集合 $G_n=\sim\overline{E}_n$ 是开的(因为 $\overline{E}_n$ 是闭的)和稠密的(因为 E_n 疏朗). 由定理 23, 我们有 $\bigcap G_n\neq\emptyset$. 这就得出了矛盾. 因此 X 是第二纲的.

本章最后一个定理通常称为一致有界性原理. 正如我们以后将看到的,它有重要的推论.

定理 25 (一致有界性原理) 设 P 是一族定义在第二纲度量空间 X 上的实的下半连续函数 p, 如果

$$p(x)\leqslant M(x)<\infty, \text{ 对每一 } x\in X, \text{ 所有 } p\in P, \tag{4}$$

那么存在 X 中的一个球 S 和常数 M, 使得

$$p(x)\leqslant M, \text{ 对每一 } x\in S, \text{ 所有 } p\in P. \tag{5}$$

证明 我们首先注意(4), (5)的基本区别在于: 在(4)中界 $M(x)$ 与 x 有关, 与 p 无关, 不等式在整个 X 上成立; 在(5)中, 界 M 是一致的,它与 x 和 p 都无关, 但这时不等式只在 X 的一个球上成立,而不一定在整个 X 上成立. 通常, 族 P 是一个函数序列 (p_n).

为了证明,我们先考虑,对每个 $p\in P$ 及每一正整数 m, 集合

$$E(m,\ p)=\{x\,|\,p(x)\leqslant m\},$$

这里因为 $\sim E(m,\ p)=\{x\,|\,p(x)>m\}$, 而 p 是下半连续函数(见本章 § 4), 所以这个集合是闭的. 于是由于

$$E_m\equiv\bigcap\{E(m,\ p)\,|\,p\in P\}$$

是闭集的交,它也是闭的. 现在

$$X=\bigcup\{E_m\,|\,m=1,\ 2,\ \cdots\}, \tag{6}$$

因为如果 $x\in X$, 那么对所有 $p\in P$, $p(x)\leqslant M(x)$, 这样存在一个整数 $m(x)$, 使得对所有 $p\in P$, $p(x)\leqslant m(x)$. 这蕴涵着 $x\in E_{m(x)}$, 即(6)得证.

由假设 X 是第二纲的, 于是(6)蕴涵着至少有一个集合 E_m, 比如说 E_M, 不是疏朗的(如果所有 E_m 都疏朗, 那么这些集合的可

列并是第一纲的）．因为 E_M 不是疏朗的，我们有 $\overline{E}_M$ 包含某个球 S，并且由 E_M 是闭的，得 $S\subset E_M=\overline{E}_M$．

最后由 $x\in S$ 可得出 $x\in E_M$． 从而对所有 $p\in P$，$p(x)\leqslant M$．这就证明了(5)．

推论 1 如果我们用实连续函数 f 的族 F 代替 P，结论也成立．

推论 2 如果用 X 完备代替 X 是第二纲集合，定理的结论也成立．

证明 由定理 24，X 完备蕴涵着 X 是第二纲的．

在第四章，我们将给出定理 25 一个影响远大的应用，它被称为关于赋范空间的 Banach-Steinhaus 定理． 这个定理在分析中很有用． 有些应用是出乎意外的，比如我们将用它来证明存在连续的周期函数，它的 Fourier 级数在一点发散．

习 题 6

1．证明第一纲集合的任一个子集是第一纲集．

2．证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 当每个 E_n 是第一纲时是第一纲的．

3．证明整数集合 Z 是 R 中的第一纲集合． 但 Z 在其本身中是第二纲集合．

4．设 $f_n:R\to R$ 是连续的，假定在 R 上 $f_n(x)$ 逐点收敛于 $f(x)\ (n\to\infty)$．证明存在 R 中的第一纲集合 S，使 f 在 $\sim S$ 上连续． 作为提示，定义

$$F_{m,n}=\{x\in R\mid |f_n(x)-f_k(x)|\leqslant m^{-1},\ \text{对所有}\ k\geqslant n\}.$$

然后考虑

$$S=\bigcup_{n,m}(F_{m,n}\sim F^{\circ}_{m,n}),$$

其中 $F^{\circ}_{m,n}$ 是 $F_{m,n}$ 的内部。

第三章　线性空间与线性度量空间

§1　线 性 空 间

第二章已经给出分析和代数中的几个重要空间. 在那里我们强调,只要涉及的仅是纯度量性质,那么空间的代数结构如何是没有关系的. 当然完全不利用空间原有的结构是愚蠢的. 在第二章的大多数例子中能够定义空间元素的加法以及空间元素与实数或复数的乘法. 通常,我们把空间的元素称为向量,而把实数或复数称为标量. 我们取所有复数序列 $x=(x_n)$ 组成的空间 s, 作为一个例子. 序列相加的自然方法是按坐标相加:

$$x+y=(x_n)+(y_n)=(x_n+y_n).$$

同样地, 序列 x 乘以复数 λ 为 $\lambda\cdot x=(\lambda x)$. 我们就把这些作为在 $s\times s$ 上的"+"运算的定义和在 $C\times s$ 上的"·"运算的定义. 显然, 对于 s 中的一切 x, y 和 C 中的一切 λ, μ 下面一些性质成立:

$$x+y=y+x,$$

$$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y,$$

$$\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x.$$

通常我们省略掉 $\lambda\cdot x$ 中的运算符号"·",而写作 λx. 当然,上述这些性质是根据 C 的性质而得到的. 例如,由定义

$$\lambda x+\lambda y=(\lambda x_n+\lambda y_n),$$

并因为
$$\lambda x_n+\lambda y_n=\lambda\{x_n+y_n\},$$

对于复数 λ, x_n, y_n 成立. 又由 s 中加法和标量乘法的定义,有

$$(\lambda\{x_n+y_n\})=\lambda(x_n+y_n)=\lambda(x+y).$$

具有上述运算的空间 s 成为复线性空间.

现在我们要定义一般的在一个标量域上的抽象线性空间. 通

常我们的标量是复数，有时也可以是实数，但除特别说明外，这个标量域总是指 C.

线性空间 C 上的线性空间(复线性空间) X 是一个非空集合，连同一个从 $X\times X$ 到 X 中的函数"+"和一个从 $C\times X$ 到 X 中的函数"·"，使得对所有的复数 λ, μ 和 X 中的元素(向量) x,y,z, 有 (1) $x+y=y+x$, (2) $(x+y)+z=x+(y+z)$, (3) 存在 $\theta\in X$ 使得 $x+\theta=x$, (4) 存在 $-x\in X$ 使得 $x+(-x)=\theta$, (5) $1\cdot x=x$, (6) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$, (7) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$, (8) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$.

线性空间定义的一个等价的说法是：它是一个加法阿贝尔群，即，定义了加法使得(1)到(4)成立，对于它还定义了乘法使得(5)到(8)成立. 元素 θ 有各种叫法，称为 X 中的零，中性元素或原点. 容易看出 θ 和 $-x$ 是唯一的. 例如，如果 θ' 也是零，那么 $\theta+\theta'=\theta$. 但既然 θ 是零，那么 $\theta+\theta'=\theta'$, 所以 $\theta=\theta'$. 显然，线性空间是一个相当丰富的代数结构，它关于其内部运算加法构成阿贝尔群(即交换群)，而且具有关于内部加法和外部标量乘法运算的一些其他性质. 在我们讨论的绝大多数情况中，主要兴趣通常总是放在 X 及加法上. 至于标量域 C 尽管是线性空间定义中的一个基本部分，但可以认为它是藏在幕后的.

今后，当我们说到线性空间的时候，总是指复线性空间，如果标量 λ, μ, …是实数，那么我们就明确地用实线性空间这个名词. 如果 λ, μ, …限定在 Q 中，我们也使用有理线性空间这个名词.

在继续讨论之前，我们应注意，这一章的 §1, §2 讲的都是纯代数的内容. 在 §3, 我们将用特定的方法把线性空间结构与度量结构结合在一起，得到线性度量空间. 这一对象，连同它的推广——拓扑线性空间以及它的特殊情形——赋范线性空间，提供了整个数学领域中最有兴趣和最富有成果的课题之一.

现在给出一些线性空间的例子.

例 1 （i）C 是具有通常复数加法和乘法的复线性空间．当然，C 不只是一个线性空间，还是一个域．显然任一域是它自身上的一个线性空间．

（ii）具有通常加法和乘法的 R 是一个实线性空间，而且是一个有理线性空间，但不是复线性空间．

（iii）如果定义按坐标的运算如下：

$$x+y=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n),$$
$$\lambda x=(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n),$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$，λ 是实数，那么 R^n 成为一个实线性空间．我们的实线性空间定义中的公理是容易验证的：$\theta=(0,0,\cdots,0)$ 和 $-x=(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)$．

类似地，C^n 可以成为一个复线性空间．

（iv）在 s 中定义

$$(x_n)+(y_n)=(x_n+y_n),$$
$$\lambda(x_n)=(\lambda x_n),$$

那么 s 成为线性空间．当我们把任一序列空间看作线性空间时，我们总假定线性运算象在 s 中那样定义．

（v）关于上面(iv)的按坐标运算，序列空间 l_p, c_0, c, l_∞ 都是线性空间．我们必须验证这四个空间对于加法和乘法确实是封闭的，即当 x,y 属于空间时，$\lambda x+\mu y$ 也在空间内．例如，在 c 中，从分析的基本定理得出，若当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to l$, $y_n\to m$，则也有 $\lambda x_n+\mu y_n\to\lambda l+\mu m$，即对任意复数 λ, μ, $(\lambda x_n+\mu y_n)=\lambda x+\mu y$ 是在 c 中．

作为另一个例子，我们考虑 $l_p(p>1)$．$\lambda x\in l_p$ 是显然的：对于任意 λ 和任意 $x\in l_p$，有 $\sum|\lambda x_k|^p=|\lambda|^p\sum|x_k|^p<\infty$．另外，由不等式 $|x_k+y_k|^p\leqslant 2^p(|x_k|^p+|y_k|^p)$ 我们看出，当 x, $y\in l_p$ 时，$x+y\in l_p$．

（vi）设 X 是任一非空集合，用 S 表示所有复函数 $f:X\to C$ 所组成的集合，对于每个 $x\in X$，定义 $\lambda f_1+\mu f_2$ 为

$$(\lambda f_1+\mu f_2)(x)=\lambda f_1(x)+\mu f_2(x).$$

这是复函数加法和标量乘法的通常的逐点式的定义. 容易看出 S 是线性空间.

(vii) 第二章例 7 的 $C[0, 1]$是一个线性空间,这里不包含度量结构. 线性运算如上面(vi)所定义的, 当 $f_1, f_2\in C[0, 1]$ 时, $\lambda f_1+\mu f_2\in C[0, 1]$, 这是初等分析中关于连续函数的简单结论.

(viii) 第二章例 9 的 A 和 I 两个都是线性空间. 因为,如果 f, g 都是解析函数,那么 $\lambda f+\mu g$ 也是解析函数.

这些例子说明, 许多重要的集合都可以用完全自然的方法构成线性空间.

我们用同构线性空间的定义来结束作为引言的这一节.

同构 两个线性空间(在同一标量域上)之间的同构 f 是一个线性双射映射, 即 f 是双射的, 且

$$f(\lambda x_1+\mu x_2)=\lambda f(x_1)+\mu f(x_2).$$

两个线性空间称为同构的(或线性同构的), 当且仅当在它们之间存在一个同构.

因为同构显然保持线性运算,因此从代数线性空间的观点看,我们把两个同构线性空间当作等价的.

例 2 设 c 是收敛序列线性空间, γ 是收敛级数空间(参看第二章,习题 1 第 9 题). 关于序列空间中通常的线性运算, γ 与 c 线性同构. 为了说明这一点,我们由 $f(a)=A$ 定义 $f:\gamma\to c$, 其中 $a=(a_k)\in\gamma$ 和 $A=(A_k)$, $A_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$, 是 $\sum a_k$ 的第 k 个部分和. 由

$$\sum_{k=1}^{n}\{\lambda a_k+\mu b_k\}=\lambda A_n+\mu B_n$$

对每个 n 成立, 可以得到 f 是线性的. 如果 $f(a)=f(b)$, 那么对于每个 k 有 $A_k=B_k$. 因此, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $\cdots$, 即 $a=b$, 于是 f 是

单射的．我们还必须说明 f 是满射的．如果已知 $A\in c$，对于 $k>1$，我们取 $a_1=A_1$，$a_k=A_k-A_{k-1}$，那么，

$$\sum_{i=1}^{k} a_i=A_k\to l \quad (k\to\infty),$$

所以 $\sum a_i$ 收敛，即 $a\in\gamma$．显然 $f(a)=A$，因此，f 是满射的．

其他一些同构线性空间的例子，将在以后各节介绍．

习　题　1

1．利用线性空间的公理证明：$-x$ 是唯一的；$\lambda\theta=\theta$；$0\cdot x=\theta$；$(-1)x=-x$；如果 $\lambda x=\theta$，那么 $\lambda=0$ 或者 $x=\theta$．

2．下列集合哪一些是线性空间：(i)所有使得 $x_k\to 1(k\to\infty)$ 的序列 $x=(x_k)$ 的集合，(ii)所有形如 $a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 的多项式集合，其中多项式的次数 n 是任意的，(iii)所有次数小于 5 的集合，(iv)所有满足微分方程 $f''(z)-f'(z)-z=0$ 的解析函数 $f=f(z)$ 的集合．

3．证明所有形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数的集合是有理线性空间，其中 $a, b\in Q$．它是一个实线性空间吗?

4．证明由 $f(x)=(x_2, -x_1, x_3)$ 给出的 $f:R^3\to R^3$ 是一个同构．通常把线性空间到它自身的同构称为自同构．

5．试证明 R^1 和 R^2 不同构．

6．设 X 是拓扑空间，并设 $f:X\to C$，那么 f 的支集定义为集合 $\{x\in X\,|\,f(x)\neq 0\}$ 的闭包，并记为 $\mathrm{supp}(f)$．于是 $\mathrm{supp}(f)$ 是一个闭集．用 S 表示所有支集是紧致的连续函数 $f:X\to C$ 的集合．证明 S 是线性空间．

提示：首先证明

$$\mathrm{supp}(f+g)\subset\mathrm{supp}(f)\cup\mathrm{supp}(g).$$

7．证明 $l(p)=\{x=(x_k)\,|\,\sum|x_k|^{p_k}<\infty\}$，其中 $p_k>0$，是线性空间，当且仅当 $\sup p_k<\infty$．

8．设 E 是 s 的子集，并且

$$E'=\{y\in s\,|\,\sum x_ky_k \text{ 对一切 } x\in E \text{ 收敛}\}.$$

证明 E' 是线性空间．当(i)　$E=\{\theta\}$，(ii)　$E=s$，(iii)　$E=l_\infty$ 时，求 E'．

§2　子空间，维数，商空间，凸集

这一节介绍几个今后要用的简单概念. 主要的目的是证明 C^n 实质上是唯一的 n 维线性空间(即每一个 n 维线性空间都与 C^n 同构). 还证明每一线性空间有 Hamel 基. 现在给出一些预备定义. 在整个讨论中, X 都表示线性空间.

子空间　线性空间 X 中的子空间或线性流形 M 是 X 的非空子集, 它满足当 $x, y\in M$ 时, 对一切 $\lambda, \mu\in C$ 有 $\lambda x+\mu y\in M$.

注意, 如果 $\{M_\alpha\}$ 是子空间族, 那么 $\cap M_\alpha$ 也是子空间.

线性包　设 S 是线性空间 X 的子集, 那么 S 的线性包 (l.hull (S)) 是包含 S 的一切子空间的交.

注意, 我们称为 l.hull(S) 的这个集合, 其他作者使用了"S 的张成"或者"由 S 生成的子空间"等名词.

$A+B$, λA　设 A, B 是 X 的子集, 我们定义

$$A+B=\{x+y\,|\,x\in A,\ y\in B\},$$

$$\lambda A=\{\lambda x\,|\,x\in A\}.$$

通常用 $A+y$ 来代替更准确的写法 $A+\{y\}$.

线性无关　X 的有限子集 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 称为线性无关集, 当且仅当关系式

$$\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n=\theta$$

在 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ 时才成立. 式子

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$$

称为向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合.

我们特别规定, 空集 $\emptyset$ 是线性无关的. 如果有限子集不是线性无关的, 就称为线性相关.

X 的任意子集(不一定有限)称为线性无关的, 当且仅当它的每一个有限子集是线性无关的.

下述基的概念，即生成一个空间的线性无关集的概念是由德国数学家 Hamel 提出的.

Hamel 基 X 的子集 B 称为 X 的 Hamel 基，当且仅当 B 是线性无关集且 $\text{l.hull}(B)=X$.

维数 线性空间 X 称为有限维的，当且仅当 X 有一有限的 Hamel 基 B，即 B 是有限集且是 Hamel 基. 如果 X 不是有限维的，就称为无限维的.

本节的后面我们将证明每一个线性空间有一个Hamel 基. 对于空间是有限维的情况，我们将在定理 2 中证明所有的 Hamel 基有相同数目的元素. 这使我们能够根据一个有限维空间的任一 Hamel 基的元素数目确定该空间的维数. 对于空间是无限维的情况，可以证明所有的 Hamel 基作为集合是等势的（参看第一章 §1）. 于是，我们可以把无限维空间的维数定义为它的 Hamel 基的基数. 可是我们并不想研究这个问题，我们将只限于有限维情况的讨论.

现在我们举出一些与上述定义有关的例子.

例 3 （i） $l_p(p\geqslant 1)$，c_0，c，l_∞ 都是 s 的子空间.

（ii） 区间 $[0, 1]$ 上的所有多项式的集合是 $C[0, 1]$ 的子空间.

（iii） $\text{l.hull}(\emptyset)=\{\theta\}$. 因为所有包含 $\emptyset$ 的子空间的交恰好是所有子空间的交，而 θ 属于每个子空间，$\{\theta\}$ 本身又是一个子空间.

如果 $S\neq\emptyset$，容易证明 $\text{l.hull}(S)$ 等于 S 的元素的一切有限线性组合的集合.

（iv） 对于任一集合 A，我们有 $2A\subset A+A$. 这是因为 $x\in 2A$，有 $x=2a=(1+1)a=1\cdot a+1\cdot a=a+a$，其中 $a\in A$. 注意，我们使用了线性空间定义中的(7)和(5). 显然，包含关系 $2A\subset A+A$ 可能是严格的.

(v) 考虑线性空间 C^n. 设 $e_i=\{0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0\}$，其中在第 i 个位置上是 1，在其他的 $n-1$ 个位置上是零，那么$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$称为 C^n 的单位向量集合. 这个集合是线性无关的. 因为

$$\lambda e_1+\cdots+\lambda e_n=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),$$

因而
$$\lambda e_1+\cdots+\lambda e_n=\theta$$

等价于
$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)=(0, \cdots, 0),$$

因此
$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0.$$

(vi) 设 $X=\{\theta\}$是由单个元素 θ 组成的平凡线性空间，那么空集 $\emptyset$ 是 X 的 Hamel 基. 因为规定 $\emptyset$ 是线性无关的，且从上述的(iii)有 $\text{l.hull}(\emptyset)=\{\theta\}$.

(vii) C^n 的单位向量集合 B 是 C^n 的 Hamel 基. 我们已经知道 B 是线性无关的，而且如果 $x=(x_1, \cdots, x_n)\in C^n$，那么 $x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ 是 B 的元素的线性组合. 所以 $x\in\text{l.hull}(B)$. 因此，$C^n=\text{l.hull}(B)$. 由于 B 是有限集合，因此得出 C^n 是有限维的. 注意，B 不是 C^n 的唯一的 Hamel 基. 例如，在 C^2 中容易验证集合$\{(1, 1), (0, -1)\}$是一个 Hamel 基.

至此，我们已把线性空间分为有限维和无限维两类. 为了实际地确定有限维空间的维数，需要下面两个定理:

定理 1 设 X 有一个具有 n 个元素的 Hamel 基，那么 X 中任意 $n+1$ 个元素的集合是线性相关的.

证明 如果 $n=1$，且$\{b\}$是 Hamel 基，那么对于 X 中的每两个 x_1, x_2，有 $x_1=\lambda_1 b$，$x_2=\lambda_2 b$. 如果 $\lambda_1\lambda_2=0$，那么或是 $x_1=\theta$ 或是 $x_2=\theta$. 因此，$\{x_1, x_2\}$是线性相关的. 如果 $\lambda_1\lambda_2\neq 0$，那么 $\lambda_1\neq 0$，$\lambda_2\neq 0$，而且因为

$$\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2=\lambda_2\lambda_1 b-\lambda_1\lambda_2 b=\theta,$$

所以$\{x_1, x_2\}$是线性相关的. 这是讨论 $n=1$ 的情况. 现在我们考虑 $n=2$ 的情况，最后再用归纳法.

取 $n=2$, $B=\{b_1, b_2\}$ 是一个 Hamel 基. 设 $S=\{x_1, x_2, x_3\}$ 是 X 中的任意三个元素的集合, 那么

$$x_i=\lambda_{i1}b_1+\lambda_{i2}b_2 \quad (i=1, 2, 3).$$

现在考虑子空间 $M=\mathrm{l.hull}\{b_1\}$. 如果 x_1, x_2, x_3 都属于 M, 那么由于 $\{b_1\}$ 是 M 的 Hamel 基, 在 $n=1$ 的情况已证明了二个元素的集合 $\{x_2, x_3\}$ 是线性相关的, 这样更有 S 是线性相关的. 如果 x_1, x_2, x_3 不是都在 M 中, 我们可以重新标注下标以保证 x_3 不在 M 中, 则有 $\lambda_{32}\neq 0$, 否则 $x_3=\lambda_{31}b_1\in M$, 这与假设矛盾. 对于 $i=1, 2$,

$$y_i=x_i-\frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{32}}x_3=\lambda_{i1}b_1+\lambda_{i2}b_2-\frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{32}}(\lambda_{31}b_1+\lambda_{32}b_2)$$

是属于 M 的. 由 $n=1$ 的情况, 两个元素的集合 $\{y_1, y_2\}$ 是线性相关的, 即存在 μ_1, μ_2 不全为零, 使得

$$\mu_1x_1+\mu_2x_2+\lambda x_3=\theta,$$

其中 λ 依赖于 $\mu_1, \mu_2, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{32}$, 它们之间的明确的关系式是什么那是无关紧要的. 从而我们得到 S 是线性相关的, 这就证明了 $n=2$ 时定理的正确性.

应用 $n=2$ 的思路, 容易完成归纳法的证明. 这个证明留作练习.

定理 2 设 X 是有限维的, 那么 X 的所有 Hamel 基有相同数目的元素.

证明 假设 B 是一个 Hamel 基, 有 n 个元素. 设 B' 是 X 的另一个 Hamel 基. B' 必是有限的, 否则它将有 $n+1$ 个线性无关的元素, 这与定理 1 相矛盾. 比如说, 如果 B' 有 m 个元素, 那么必有 $m=n$. 因为如果 $m>n$ 或者 $m<n$, 就与定理 1 矛盾. 因此, B, B' 是两个具有相同数目的元素的基.

根据定理 2 以下定义是有意义的.

维数 如果 X 是一有限维空间，那么它的维数定义为它的任一 Hamel 基的元素的数目.

例 4 C^n 是 n 维的，因为 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是一个具有 n 个元素的 Hamel 基.

下面的定理说明，在某种意义上例 4 是唯一能够给出的 n 维线性空间的例子.

定理 3 如果 X 是有限维的，维数是 n，那么 X 与 C^n 同构.

证明 因为 X 是有限维的，因此存在 Hamel 基 $\{b_1, \cdots, b_n\}$. 如果 $x\in X$，那么对于某些标量 λ_i 有 $x=\lambda_1 b_1+\cdots+\lambda_n b_n$. 这些 λ_i 是唯一的. 因为如果

$$x=\mu_1 b_1+\cdots+\mu_n b_n,$$

那么

$$(\lambda_1-\mu_1)b_1+\cdots+(\lambda_n-\mu_n)b_n=\theta,$$

由于 b_i 是线性无关的，所以有 $\lambda_i=\mu_i(1\leqslant i\leqslant n)$. 由此可见，由

$$f(x)=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

给出的映射 $f: X\to C^n$ 是有确定意义的. 显然它是一个双射，而且容易验证对于标量 α, β 和属于 X 的 x, y 有

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

因此，f 是一个同构.

我们可以举序列空间 c_0, s 和函数空间 $C[0, 1]$ 作为无限维空间的例子. 例如，如果 e_k 表示在第 k 个位置是 1 在其他位置是零的无限序列，那么 $\{e_1, e_2, \cdots\}$ 是 c_0 的一个无限的线性无关集合，因此，不管 n 有多大，在 c_0 中总存在 $n+1$ 个线性无关的元素.

由定义. 有限维空间有有限的 Hamel 基. 一个无限维空间究竟是否有一个 Hamel 基这决不是显然的. 为了证明所有的线性空间都有 Hamel 基，看来必须使用 Zorn 引理或者选择公理的某个形式. 如我们所做的那样，把 Zorn 引理作为一个公理，那么证明每个线性空间有一个 Hamel 基就是非常容易的. 可是，这种方

法不是构造性的，它并没有明确指出每个具体空间的 Hamel 基是什么.

定理 4 每个线性空间 X 有一个 Hamel 基.

证明 设 P 是 X 的所有线性无关子集所成的族，那么由于 $\emptyset\in P$，因此 P 是非空集合. 按照集合的包含关系，P 是半序的，设 $T=\{L_\alpha\}$ 是 P 的一个全序子集. 设 $L=\cup L_\alpha$ 是 T 中所有 L_α 的并集，那么 L 是线性无关集合. 因为如果 $S=\{s_1, \cdots, s_n\}$ 是 L 的一个有限子集，那么 $s_i\in L_{\alpha_i}(1\leqslant i\leqslant n)$. 由 T 的全序性，如果必要的话，对下标重新编号，我们可以排成 $L_{\alpha_1}\subset\cdots\subset L_{\alpha_n}$. 因此，$s_i\in L_{\alpha_n}(1\leqslant i\leqslant n)$. 由于它是线性无关集合 L_{α_n} 的有限子集，所以 S 是线性无关的. 于是 T 的上界是 L. 由 Zorn 引理(参看第一章)，P 有一个极大元素，比如说是 B，现在我们可以说，X 中的每个 x 也在 l.hull(B) 中. 因为如果相反，存在一个 $x\in\sim$l.hull(B)，由此得 $B\cup\{x\}$ 是线性无关的. 但 $B\cup\{x\}\supset B$，这个包含关系是严格地包含，这就与 B 是极大元素矛盾. 由此我们证明了 B 是线性无关的且 l.hull$(B)=X$，B 就是我们所要求的 Hamel 基.

熟悉初等群论的读者遇到过商群或者因子群 G/H 的概念，其中 G 是一个群，H 是一个正规子群. 如果 X 是一个线性空间，M 是一个子空间，那么我们可以定义一个商空间 X/M，它有点类似于商群 G/H. 我们要证明在 X/M 中可以定义一种自然的运算，以使它成为一个线性空间. 这样 X 的每个子空间 M 就生成一个新的线性空间 X/M.

商空间 X/M 设 X 是线性空间，M 是子空间，定义 $x\equiv y(\mathrm{mod}\,M)$ 为 $x-y\in M$，那么 $\equiv$ 是一个等价关系，X 模 M 的商空间 X/M 定义为集合 $\{E_x|x\in X\}$，其中 $E_x=\{y|y\equiv x(\mathrm{mod}\,M)\}$. 如果定义 $E_x+E_y=E_{x+y}$，$\lambda E_x=E_{\lambda x}$，那么 X/M 成为线性空间.

上述断言的证明是很普通的，很显然 $\equiv$ 是等价关系. 另外，

在 X/M 中定义加法和标量乘法是有意义的．例如，如果 $x\equiv x'(\mathrm{mod}\ M)$，$y\equiv y'(\mathrm{mod}\ M)$，那么 $x+y\equiv x'+y'(\mathrm{mod}\ M)$，因此，取 E_x，E_y 的不同的代表不改变 E_x+E_y．类似地看出 λE_x 的意义也是确定的．因为 X 是线性的，所以，很明显 X/M 满足线性空间的公理．我们注意到 X/M 的零是子空间 M，因为

$$E_\theta=\{y\equiv\theta(\mathrm{mod}\ M)\}=\{y\in M\}=M.$$

例 5 设 $X=L[0,1]$（参看第二章例 6）．关于组合函数的通常的代数运算 X 是线性空间．记 $M=\{f\in X\,|\,f(t)=0$ 几乎处处成立$\}$，那么 M 是 X 的子空间，而 $f\equiv g(\mathrm{mod}\ M)$ 的意思是 $f(t)=g(t)$ 几乎处处成立．在积分理论中，通常是用商空间 X/M 进行研究，而不是用 X 本身．在积分理论中，$f=g$ 一般被解释为

$$f\equiv g(\mathrm{mod}\ M).$$

线性空间中凸集和绝对凸集的概念在许多方面是重要的．现在我们给出这些概念的定义．

凸性和绝对凸性 设 E 是线性空间的一个子集，那么

（i）E 称为凸集，当且仅当由 $x,\ y\in E$，$\lambda+\mu=1$，$\lambda\geqslant 0$，$\mu\geqslant 0$ 可推出 $\lambda x+\mu y\in E$．

（ii）E 称为平衡集，当且仅当由 $x\in E$，$|\lambda|\leqslant 1$ 可推出 $\lambda x\in E$．

（iii）E 称为绝对凸集，当且仅当由 $x,\ y\in E$，$|\lambda|+|\mu|\leqslant 1$ 可推出 $\lambda x+\mu y\in E$．

不难证明，当且仅当集合 E 是凸的且是平衡的时，它才是绝对凸集．这个证明留作练习．

有一个明显的几何方法来描述凸性．我们称

$$L(x,\ y)=\{\lambda x+(1-\lambda)y\,|\,0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$$

为连结 x 和 y 的线段，显然可知，E 是凸集的充要条件是：当 E 包含 x，y 时 E 也包含 $L(x,\ y)$．

例 6 （i）显然，每一个子空间是绝对凸集．而且每一个绝对

凸集是凸集.

(ii) 设 d 是 C^n 上通常的度量,那么 C^n 中的每个球 $S(a, r)$ 是凸集. 因为如果 $d(x, a)<r$, $d(y, a)<r$, $\lambda+\mu=1$, 等等,那么由 Minkowski 不等式,有

$$d(\lambda x+\mu y, a)=\left(\sum_1^n|\lambda(x_k-a_k)+\mu(y_k-a_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\lambda d(x, a)+\mu d(y, a)<r.$$

构造绝对凸集的简单方法是应用某类称为半范数的实函数.

半范数 线性空间 X 上的半范数 p 是一个函数 $p: X\to R$, 使得 (1) $p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$, (2) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$.

性质 (1) 称为 p 的绝对齐性, 性质 (2) 称为 p 的次可加性. 因此,半范数是 X 上的实的次可加的绝对齐次函数. 此外,由 (1) 和 (2) 有 $0=p(\theta)\leqslant p(x)+p(-x)=2p(x)$, 因此, p 总是非负的.

例 7 (i) $p(x)=|x|$ 是 C 上的半范数.

(ii) $p_1(x)=\sup|x_n|$ 和 $p_2(x)=|\lim x_n|$ 是 c 上的半范数.

(iii) 如果 $f: X\to C$ 是一个线性映射, 那么 $p(x)=|f(x)|$ 是 X 上的半范数.

现在我们给出一个非常简单的定理.

定理 5 设 p 是线性空间 X 的半范数, 并设 $r>0$, 那么集合 $\{x|p(x)<r\}$, $\{x|p(x)\leqslant r\}$ 是绝对凸集.

证明 假设 $p(x)\leqslant r$, $p(y)\leqslant r$, 那么

$$p(\lambda x+\mu y)\leqslant|\lambda|p(x)+|\mu|p(y)\leqslant(|\lambda|+|\mu|)r\leqslant r,$$

其中 $|\lambda|+|\mu|\leqslant 1$. 因此 $\{x|p(x)\leqslant r\}$ 是绝对凸集. 另一个集合的证明类似.

在下一节我们介绍拓扑线性空间的概念时, 将给出一个类似于定理 5 的逆定理的定理. 从一个非空的开的绝对凸集 A 出发, 我们能构造 X 上的半范数,且称为 A 的度规(gauge)(参看定理 6).

习 题 2

1. 证明任一族子空间的交是子空间.

2. 设 S 是线性空间的非空子集. 证明 $\mathrm{l.hull}(S)$是 S 中元素的一切有限线性组合的集合. 再证明 $\mathrm{l.hull}(S)$是包含 S 的最小的子空间.

3. 证明 $S\neq\emptyset$ 是子空间, 当且仅当 $S+S\subset S$ 和对于每个 λ 有 $\lambda S\subset S$.

4. 设 M_1, M_2 是子空间. 证明 $\mathrm{l.hull}(M_1\cup M_2)=M_1+M_2$.

5. 证明包含关系 $2A\subset A+A$ 可以严格成立.

6. 设用 Φ 表示有限序列 $x=(x_n)$的集合. (序列 x 称为有限的当且仅当存在 $p\in N$ 使得对于所有的 $n\geqslant p$ 有 $x_n=0$.) 证明 Φ 是 s 的子空间, $\mathrm{l.hull}\{e_1, e_2, \cdots\}=\Phi$. 证明可列的无限集合$\{e_1, e_2, \cdots\}$是 s 的一个线性无关子集, 但不是 s 的 Hamel 基.

7. 设 M 是 X 的子空间. 用 $f(x)=E_x$ 定义 $f:X\to X/M$. 证明这个通常称为 X 到 X/M 上的典则(canonical)映射的 f 是线性的, 而且是满射的.

8. 证明一个集合是绝对凸集, 当且仅当它是凸的和平衡的.

9. 设 E 是凸集, A 和 B 是绝对凸集. 证明 $x+\lambda E$ 是凸集而 $A+B$, λA 是绝对凸集.

10. 证明任意一族凸集的交集是凸集. 证明包含给定集合 S 的最小的凸集是一切有限线性组合 $\sum\lambda_i s_i$ 的集合, 其中 $s_i\in S$, $\lambda_i\geqslant 0$, $\sum\lambda_i=1$. 这个最小的凸集称为 S 的凸包.

11. 设 A 是一个非空的绝对凸集. 证明 $\theta\in A$ 而且当 $|\lambda|\leqslant|\mu|$ 时有 $\lambda A\subset\mu A$.

§3 线性度量空间, 副范数, 半范数和范数

到现在这样一个阶段, 我们自然要把第二章的度量概念与这一章的线性空间概念结合起来. 可是如果不是用相当紧密的方法把度量和线性性质连结在一起, 那么这个结合是没有意义的. 完成这个连结普遍使用的方法是通过连续性. 由于这样的连结能概括大量的具体情况, 这个方法被认为是熔合度量和线性结构最好的方法.

就下定义而言，定义线性拓扑空间不比定义线性度量空间更难，所以我们就来定义线性拓扑空间．可是在这本入门书中，不能深入地讨论线性拓扑空间的理论．建议感兴趣的读者去查阅 Robertson 和 Robertson 的 Cambridge Tract（剑桥小册）(1964)．在给出一般定义之前，我们先来看一个例子，它基本上是这个定义的来源．空间 C 是带有度量 $d(x, y)=|x-y|$ $(x, y\in C)$ 的度量空间，关于通常的加法和乘法，而 C 也是它自身上的线性空间．度量结构和线性结构是通过连续性连结在一起的．当 $x\to x_0, y\to y_0, \lambda\to\lambda_0$ 时，有 $x+y\to x_0+y_0, \lambda x\to\lambda_0 x_0$，即加法和标量乘法是连续运算．我们要求线性拓扑空间具有与 C 相同的特性，因此我们定义如下：

线性拓扑空间 线性拓扑空间是一个线性空间 X，它有一个拓扑 T，使得 X 中加法和标量乘法这两个代数运算是连续的．如果 T 是由度量确定的，那么就用线性度量空间的名称．

加法的连续性是指由 $f(x, y)=x+y$ 定义的 $f: X\times X\to X$ 在 $X\times X$ 上是连续的，标量乘法的连续性是指由 $f(\lambda, x)=\lambda x$ 定义的 $f: C\times X\to X$ 在 $C\times X$ 上是连续的．在乘积空间 $X\times X$ 和 $C\times X$ 上的拓扑如下定义：对于任意两个一般的拓扑空间 X_1 和 X_2，我们说 G 是 $X_1\times X_2$ 中的开集，当且仅当对于任意的 $g\in G$，在 X_1 中存在开集 G_1，在 X_2 中存在开集 G_2，使得 $g\in G_1\times G_2\subset G$．容易证明这样一些集合 G 的族确实是关于 $X_1\times X_2$ 的一个拓扑，这个拓扑就称为乘积拓扑．在上面线性拓扑空间的定义中，我们认为 C 有通常的模度量拓扑．

如果 (X_1, d_1) 和 (X_2, d_2) 是度量空间，那么

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2))=d(x_1, y_1)+d(x_2, y_2)$$

是 $X_1\times X_2$ 上的一个度量，其中 (x_1, x_2) 和 (y_1, y_2) 在 $X_1\times X_1$ 中．证明由 d 产生的度量拓扑确实是 $X_1\times X_2$ 上的乘积拓扑，这

是很简单的．所以，如果(X, d)是线性度量空间，那么λx(举例说)的连续性可以表示如下：对于每个(λ_0, x_0)和任一$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当

$$d(x, x_0)+|\lambda-\lambda_0|<\delta$$

时，有

$$d(\lambda x, \lambda_0 x_0)<\varepsilon.$$

例 8 (i) 设$0<p_k\leqslant 1$，$X=l(p)$．我们已经知道X是线性空间，并且

$$d(x, y)=\sum|x_k-y_k|^{p_k}$$

确定了X上的一个度量拓扑．我们来证明X是拓扑线性空间．加法的连续性容易证明．为了简化符号在式中略去下标k，有

$$\begin{aligned}d(x+y, a+b)&=\sum|x+y-(a+b)|^p\\&\leqslant\sum|x-a|^p+\sum|y-b|^p\\&=d(x, a)+d(y, b).\end{aligned}$$

标量乘法的连续性证明如下．书写时还是略去下标k.

$$\begin{aligned}d(\lambda x, \lambda_0 a)&=\sum|(\lambda-\lambda_0)(x-a)+(\lambda-\lambda_0)a+\lambda_0(x-a)|^p\\&\leqslant\sum|\lambda-\lambda_0|^p|x-a|^p+\sum|\lambda-\lambda_0|^p|a|^p\\&\quad+\sum|\lambda_0|^p|x-a|^p,\end{aligned}$$

用$\sum_1$, $\sum_2$, $\sum_3$分别表示上式右端的三个和式，则

$$d(\lambda x, \lambda_0 a)\leqslant\sum_1+\sum_2+\sum_3.$$

现在$|\lambda_0|^{p_k}\leqslant\max(1, |\lambda_0|)=M$(比如说)．如果$|\lambda-\lambda_0|<1$，那么$|\lambda-\lambda_0|^{p_k}<1$．下面设$N$是正整数，$|\lambda-\lambda_0|<1$，那么

$$\sum_2\leqslant\sum_{k=1}^{N}|\lambda-\lambda_0|^p|a|^p+\sum_{k=N+1}^{\infty}|a|^p=A+B.$$

设给定$\varepsilon>0$，先选取足够大的N，使得$B<\frac{\varepsilon}{3}$．然后选取$0<\eta<1$，使得当$|\lambda-\lambda_0|<\eta$时，有限和A小于$\frac{\varepsilon}{3}$．记$\delta=\min(\eta, \varepsilon/3(1+M))$，那么若

$$d(x, a)+|\lambda-\lambda_0|<\delta,$$

则

$$d(\lambda x, \lambda_0 a)\leqslant\sum_1+A+B+\sum_3\leqslant d(x, a)$$

$$+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+Md(x, a)<\varepsilon.$$

因此，在每个点(λ_0, a)上标量乘法是连续的.

(ii) 现在我们举一个例子，说明只要空间的标量乘法的连续性不成立，它就不能成为拓扑线性空间. 设 $p=(p_k)=(1/k)$，并记

$$l_\infty(p)=\{x|\sup|x_k|^{p_k}<\infty\},$$

那么 $l_\infty(p)$是线性空间. $d(x, y)=\sup|x_k-y_k|^{p_k}$ 是 $l_\infty(p)$的度量，对于加法是连续的. 可是存在 $x\in l_\infty(p)$，使得当 $\lambda\to0$ 时 $\lambda x\nrightarrow\theta$. 因为，如果对于每个 k，令 $x_k=1$，取 $0<|\lambda|<1$，那么对于所有的 k，$|\lambda|^{1/k}<1$，而当 $k\to\infty$ 时 $|\lambda|^{1/k}\to1$. 因此

$$d(\lambda x, \theta)=\sup|\lambda|^{1/k}=1.$$

由此得到当 $\lambda\to0$ 时，$\lambda x\nrightarrow\theta$.

在本章§2的末尾我们讲过，每个非空开的绝对凸集可以产生一个半范数. 现在我们来证明这一点.

定理 6 设 A 是拓扑线性空间 X 中非空开的绝对凸集，那么

$$p(x)=\inf\{\lambda>0|x\in\lambda A\}$$

是 X 上的半范数. 这个半范数称为 A 的度规(gauge).

证明 设 $A\neq\emptyset$，则有某个 $x\in A$，因此，由绝对凸性有 $0\cdot x+0\cdot x\in A$，即 $\theta\in A$. 因为 X 是线性拓扑空间，所以对于每个 $x\in X$，当 $\mu\to0$ 时有 $\mu x\to\theta$. 因为 A 是含 θ 的开集，所以存在 $\delta>0$，使得 $\delta x\in A$. 记 $\lambda=\delta^{-1}$，那么 $x\in\lambda A$. 因此，对于每个 $x\in X$ 存在 $\lambda>0$，使得 $x\in\lambda A$，从而 $0\leqslant p(x)<\infty$.

现在取 $x, y\in X$，设 $\varepsilon>0$ 已给定，那么存在 $\lambda>0$ 使得 $x\in\lambda A$ 和 $\lambda<p(x)+\varepsilon$. 另外存在 $\mu>0$，使得 $y\in\mu A$ 和 $\mu<p(y)$

$+\varepsilon$. 因为 A 是绝对凸集，有 $x+y\in(\lambda+\mu)A$，因此 $p(x+y)\leqslant\lambda+\mu$. 所以

$$p(x+y)<p(x)+p(y)+2\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，所以 $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$. 最后，用类似的方法可以证明 $p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$. 因而 p 是 X 上的半范数. 这就证明了定理.

让我们回忆一下例 8 的空间 $l(p)$. 这个空间是线性度量空间. 然而，它不只是一个线性度量空间. 由

$$g(x)=\sum|x_k|^{p_k}$$

定义的函数 $g:l(p)\to R$ 给出了度量 d，这里 $d(x,\ y)=g(x-y)$. 函数 g 有下列性质：$g(\theta)=0$，$g(x)=g(-x)$，g 是次可加的，并且当 $\lambda\to\lambda_0$，$x\to x_0$（即 $g(x-x_0)\to 0$）时，$\lambda x\to\lambda_0x_0$. 在一个一般空间上定义的具有这些性质的函数就称为一个副范数.

副范数(paranorm)　副范数 $g:X\to R$（X 是线性空间）满足 $g(\theta)=0$，$g(x)=g(-x)$，$g(x+y)\leqslant g(x)+g(y)$，并且当 $\lambda\to\lambda_0$，$x\to x_0$ 时有 $\lambda x\to\lambda_0x_0$. 副赋范空间 (X,g) 是具有副范数 g 的线性空间 X.

显然，每个副赋范空间在 $d(x,\ y)=g(x-y)$ 时，成为一个半度量空间. 可以证明在每一个线性半度量空间上可以定义一个副范数，它产生相同的半度量拓扑. 因此副赋范空间和线性半度量空间实际上一回事. 但是，我们认为这个结果的证明已超出了本书范围.

现在我们已有了两类重要的具体的线性拓扑空间，副赋范空间 $(X,\ g)$ 和半赋范空间 $(X,\ p)$.

例 9　(i) $l(p)$ 是具有 $g(x)=\sum|x_k|^{p_k}$（参看 92 页例 8(i)）的副赋范空间，其中 $0<p_k\leqslant 1$.

(ii) 每个半范数是副范数，但其逆一般是不成立的. 第一个

结论容易证明. 为了证明“其逆不成立”我们在 $l((1/k))$ 上考虑

$$g(x)=\sum|x_k|^{1/k}.$$

那么 g 是一个副范数, 但显然存在 x 使得 $g(2x)<2g(x)$. 因此, g 不是绝对齐次的.

一个更特殊的线性拓扑空间是赋范空间. 范数 $\|\cdot\|:X\to R$ 就是半范数加上性质: 若 $\|x\|=0$, 那么 $x=\theta$. 因此赋范空间是一个对 $(X,\|\cdot\|)$. 赋范空间最简单的例子或许就是 C, 具有 $\|x\|=|x|$.

赋范空间理论是一般分析中一个基本研究领域. 我们将在第四章研究它.

习 题 3

1. 对任一有界序列 $p=(p_k)$, 证明 $l(p)$ 是副赋范空间, 并证明 $l(p)$ 是完备的.

注意, 一般来说, 一个完备的线性度量空间, 或完备的副赋范空间, 经常被称为 Fréchet 空间, 它是以 M. Fréchet 命名的.

2. 证明具有

$$g(x)=\sum 2^{-k}(|x_k|/(1+|x_k|))$$

的空间 s 是 Fréchet 空间.

3. 设 (g_n) 是线性空间 X 上的副范数序列. 证明

$$g(x)=\sum 2^{-k}g_k(x)/(1+g_k(x))$$

是 X 上的副范数. 还证明 $g(x_n)\to 0(n\to\infty)$ 当且仅当对于每个 k 有 $g_k(x_n)\to 0(n\to\infty)$ 时成立.

4. 设 g 是对所有的 λ 和所有的 x 满足 $g(\lambda x)\leqslant|\lambda|g(x)$ 的副范数, 证明 g 是半范数.

5. 设 p, q 是 X 上的半范数, 且当 $p(x)<1$ 时总有 $q(x)\leqslant 1$. 证明对所有的 $x\in X$ 有 $q(x)\leqslant p(x)$.

6. 设 p 是 A 的尺度, 证明

$$\{x|p(x)<1\}\subset A\subset\{x|p(x)\leqslant 1\}.$$

7. 假设 X 是有限维的具有 Hamel 基 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 的线性空间, 证明

$$\|x\|=\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|$$

是 X 的范数，其中 $x=\lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\cdots+\lambda_nb_n$.

§4 基 底

如果 B 是线性空间 X 的 Hamel 基，那么 B 是线性无关的，而且 $\mathrm{l.hull}(B)=X$. 因此，如果 $x\in X$，那么 x 可以表示成 B 的元素的有限线性组合 $x=\sum\lambda_kb_k$. 因为 B 是线性无关的，这个表示式是唯一的.

在某些问题中(参看第四章§2例子)，这样一种基底的概念是有用的：它使我们可以把一个元素 x 唯一地表示为一个无穷级数 $x=\sum\lambda_kb_k$. 这个概念本身包含着收敛的意思，因而包含某一类拓扑. 当然 Hamel 基用不到拓扑. 我们将限于在副赋范空间 (X,g) (参看本章§3)中定义基底.

基底 设 (X, g) 是副赋范空间. X 的元素序列 (b_k) 称为 X 的一个基底当且仅当对于每个 $x\in X$ 存在唯一的标量序列 (λ_k) 使得 $x=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_kb_k$，即使得 $g\left(x-\sum_{k=1}^{n}\lambda_kb_k\right)\to0\ (n\to\infty)$.

基底的这个概念是 J. Schauder 在 1927 年提出的. 这就是我们常把基底称为 Schauder 基底的原因. 我们所采用的术语把基底和 Hamel 基区分开来. 可是容易证明，在有限维空间中这两个概念是一致的.

例 10 记 $e_1=(1, 0, 0, \cdots)$, $e_2=(0, 1, 0, \cdots)\cdots$, 那么 (e_k) 是空间 $l(p), c_0, s$ 的基底. 在这三个空间中自然的副范数或范数是

$$g(x)=(\sum|x_k|^{p_k})^{1/M}, \quad 在\ l(p)\ 上,$$

$$\|x\|=\sup|x_k|, \quad 在\ c_0\ 上,$$

$$g(x)=\sum2^{-k}(|x_k|/(1+|x_k|)), \quad 在\ s\ 上.$$

例如，我们来考虑 $l(p)$. 取任一 $x=(x_k)\in l(p)$. 记

$$y_n = x - (x_1, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots).$$

那么 $$y_n = x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = (0, 0, \cdots, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots).$$

从而 $$[g(y_n)]^M = \sum_{n+1}^{\infty} |x_k|^{p_k} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

也即 $x = \sum x_k e_k$. x 的这个表示式是唯一的, 因为如果 $x = \sum \lambda_k e_k$, 那么

$$g\left(\sum_1^n (\lambda_k - x_k) e_k\right) \to 0 \quad (n\to\infty),$$

由此得 $$\sum_1^n |\lambda_k - x_k|^{p_k} \to 0.$$

也就是对所有 k $\lambda_k = x_k$.

我们可以用同样的方法讨论 c_0 和 s. 注意, (e_k)是 c_0 的基底, 但$\{e_k\}$不是 Hamel 基. 因为 $\text{l.hull}\{e_k\} = \Phi$ (有限序列空间)是 c_0 的真子集.

例 11 取 e_k 如例 10, 记 $e = (1, 1, \cdots)$, 那么在 c 的自然范数$\|x\| = \sup|x_k|$下, $(e, e_1, e_2, \cdots)$是 c 的基底. 因为假设 $x \in c$, 且 $x_k \to l (k\to\infty)$, 那么

$$\left\| x - le - \sum_1^n (x_k - l) e_k \right\| = \sup_{k>n} |x_k - l| \to 0 \quad (n\to\infty),$$

所以 $x = le + \sum (x_k - l) e_k$. 容易证明 x 的这个表示式是唯一的.

刚才给出的 c 的基底, 在第四章 §2 确定 c 的对偶空间时要用到它.

已经知道, 不是所有的副赋范空间都有基底. 下面的定理告诉我们副赋范空间有基底的必要条件是它是一个可分的半度量空间(参看第二章 §3).

定理 7 设(X, g)是有基底 $B = (b_k)$ 的副赋范空间, 那么 X 是可分的.

证明 设 S 是一切有限线性组合$\sum_1^n (r_k + i s_k) b_k$ 的集合, 其中

r_k, s_k 是有理数. 容易证明 S 是可列集合. 现在我们证明 S 在 X 中是稠密的. 取任一 $x\in X$, 那么 $x=\sum\lambda_k b_k$, 所以对于每个 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得

$$g\left(x-\sum_1^N \lambda_k b_k\right)<\varepsilon.$$

取 k 使得 $1\leqslant k\leqslant N$. 然后选取充分接近于 λ_k 的 $\mu_k=r_k+is_k$, 使得 $g((\lambda_k-\mu_k)b_k)<\varepsilon/N$. 由在 X 中标量乘法的连续性, 这是可能的. 于是我们有

$$g\left(x-\sum_1^N\mu_k b_k\right)<\varepsilon+g\left(\sum_1^N (\lambda_k-\mu_k)b_k\right)<2\varepsilon.$$

由此得出 S 在 X 中是稠密的,所以 X 是可分的.

定理 7 可以用来说明某些副赋范空间没有基底. 例如可以证明 l_∞ 是不可分的,所以根据定理 7 它没有基底.

习 题 4

1. 设(X, g)有基底(b_k), 那么对于每个 $x\in X$, 有 $x=\sum\lambda_k b_k$. 证明由 $f_k(x)=\lambda_k$ 给定的每个映射 $f_k:X\to C$ 在 X 上是线性的.

2. 用 P 表示 t 在$[0, 1]$上的所有实多项式的赋范空间,其范数为$\|x\|=\max\{|x(t)|\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\}$. 证明$\{t^k|k=0, 1, \cdots\}$是 P 的基底, 并确定第 1 题中的映射 f_k.

3. (i) 证明(e_k)是 c_0 的基底, 并证明序列$\left(\left\|\sum_1^n x_k e_k\right\|\right)$是递增的.

(ii) 设 $x\in c$, $\lim x_k=l$, 证明序列

设 $$\left(\left\| le+\sum_1^n(x_k-l)e_k\right\|\right)$$

是递增的.

4. 证明 l_∞ 关于范数$\|x\|=\sup|x|$是赋范空间. 证明 $d(x,y)=\|x-y\|$ 是 l_∞ 上的度量,并证明在这个度量下 l_∞ 是不可分的. 由此推出 l_∞ 没有基底.

5. 把 $C[0, 1]$看作是实值函数的赋范空间. S 表示$[0, 1]$上所有多角形函数的集合,这些多角形的顶点的坐标是有理数. 用证明 S 是可列稠密子

集合来证明 $C[0, 1]$是可分的.

试证明 $C[0, 1]$有基底.

§5 分　　布

分布理论的现代形式是俄国数学家 S. L. Soboleff 在 1936 年提出来的. 二十世纪五十年代, L. Schwartz 大大地发展和系统化了这个理论. 分布,有时也称为广义函数,在许多领域都有应用,例如,在微分方程理论,微分算子的特征函数展开式以及随机过程理论中等.

在此我们只打算介绍分布理论的少数几个基本概念, 以便为感兴趣的读者阅读更全面和更广泛的著作作好准备. (例如, Schwartz, 1950; Gelfand 和 Shilov, 1964; D. S. Jones, 1966.)

测试函数 首先我们定义测试函数的线性空间 D. 我们说 $x\in D$, 当且仅当(1) $x: R\to C$, (2) x 在 R 上是无限可微的, (3) 在某一闭区间 $[a, b]$ 之外 $x(t)=0$. 闭区间 $[a, b]$ 一般依赖于函数 $x=x(t)$.

例 12 对于 $|t|<1$, $x(t)=\exp(t^2-1)^{-1}$, 而对于 $|t|\geqslant 1$, $x(t)=0$, 定义了一个测试函数 x. 容易证明在 $t=\pm 1$ 时, 各阶导数 $x^{(k)}(t)=0$.

在 D 中收敛的定义如下: 设 (x_n) 是 D 中的序列, 那么我们说 $x_n\to 0$(在 D 中)当且仅当对于所有的 x_n 存在同一个区间 $[a, b]$, 使得对一切 n, 在 $[a, b]$ 之外 $x_n(t)=0$, 而对于 $k=0, 1, \cdots$, $x_n^{(k)}(t)\to 0$ ($n\to\infty$, 在 $[a, b]$ 上一致地).

例 13 取 x 如例 12, 而设 $x_n(t)=x(t)/n$, 那么对于一切 n, 在 $[-1, 1]$ 之外 $x_n(t)=0$, 对于一切 n 和 t, $|x_n(t)|\leqslant 1/ne$, 因此 $x_n(t)\to 0$(在 R 上一致地). 现在对于 $k=1, 2, \cdots$, $x^{(k)}(t)$ 在 R 上可微, 因此, 在 $[-1, 1]$ 上有界. 于是对于这些 k 和一切 n, t, 我

们有$|x_n^{(k)}(t)|\leqslant M_k/n$. 因此 $x_n^{(k)}(t)\to 0$ ($n\to\infty$, 在$[-1, 1]$上一致地), 于是 $x_n\to 0$(在 D 中).

在 D 中序列(x_n)收敛于一个元素 $x\in D$ 是由 $x_n-x\to 0$(在 D 中)来定义的. 现在我们可以定义分布了.

分布　分布 f 是 D 上的一个连续线性泛函, 这里 D 是测试函数的线性空间.

说 f 是泛函就是说 $f: D\to C$. f 的线性是指对于任意λ, $\mu\in C$ 和任意 x, $y\in D$ 有 $f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$. 最后, f 称为连续的当且仅当 $x_n\to 0$ 时(在 D 中)有 $f(x_n)\to 0$. 我们用 D' 表示一切分布的集合.

注意, 如果 f 是一个分布, 那么当 $x_n\to x$(在 D 中)时, 有 $f(x_n)\to f(x)$.

例 14(δ-分布)　对于每个 $x\in D$, 定义 $\delta(x)=x(0)$, 那么容易验证 $\delta\in D'$. δ-分布有时就随便地称为"δ-函数".

例 15　设 F 在每个有限区间上 Lebesgue 可积, 在 D 上定义

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)x(t)dt.$$

由于 x 在某个闭区间之外等于零, 所以这个积分实际上是在有限区间上的积分. 因而 f 是 D 上的一个泛函, 由积分的线性性质知它是线性的. 现在假设 $x_n\to x$ (在 D 中), 那么因为 $x_n(t)\to x(t)$ (在某个闭区间$[a, b]$上一致地), 所以

$$|f(x_n)-f(x)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|F(t)|\,|x_n(t)-x(t)|dt\to 0 \quad (n\to\infty).$$

现在我们证明了每个适当可积的 F 通过积分的方法产生一个分布 f. 由一个在每一有限区间上可积的函数通过积分的方法产生的任一分布称为正则分布. 非正则分布称为奇异分布.

例 16　例 14 的 δ-分布是奇异分布. 因为假设存在在每一有

限区间上 Lebesgue 可积的函数 F,使得对于一切 $x\in D$ 有

$$\delta(x)=x(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)x(t)dt.$$

对于 $a>0$, 在 $(-a, a)$ 内取 $x(t)=\exp\{a^2(t^2-a^2)^{-1}\}$, 在区间 $(-a, a)$ 之外取 $x(t)=0$,那么 $x\in D$,因此

$$e^{-1}=\left|\int_{-a}^{a}F(t)x(t)dt\right|\leqslant e^{-1}\int_{-a}^{a}|F(t)|dt.$$

但在 Lebesgue 积分理论中一个一般的结果是: 当 $a\to 0$ 时,

$$\int_{-a}^{a}|F(t)|dt\to 0.$$

因此产生矛盾. 由此得出 δ-分布是奇异分布.

很明显, D' 关于函数的逐点运算是线性空间. D' 中序列的收敛性定义为: 在 D' 中 (f_k) 收敛, 当且仅当 $(f_k(x))$ 对于每个 $x\in D$ 在 C 中收敛. 如果对于每个 $x\in D$ $(f_k(x))$ 的极限是 $f(x)$, 那么 f 是线性的, 因为

$$\begin{aligned}f(\lambda x+\mu y)&=\lim_k f_k(\lambda x+\mu y)\\&=\lim_k\{\lambda f_k(x)+\mu f_k(y)\}=\lambda f(x)+\mu f(y).\end{aligned}$$

可以证明 f 一定是连续的, 即当 $x_n\to 0$(在 D 中)时, 有 $f(x_n)\to 0$. 可是这个证明是相当复杂的. 感兴趣的读者可去查阅 Gelfand 和 Shilov 的著作.

一个分布级数 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k$ 称为收敛于 f, 当且仅当对于每个 $x\in D$, $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ 收敛于 $f(x)$. 根据上述说的, 收敛的分布级数的和函数也是一个分布.

例 17 设 $F_k(t)=\sin kt$ 并假设 f_k 是由 F_k 生成的正则分布, 那么在 D' 中 $f_k\to\theta$. 因为, 取 $x\in D$, 假设 x 在 $(-a, a)$ 之外等于 0, 那么由分部积分法

$$|f_k(x)|=\left|\int_{-a}^{a}\sin kt\cdot x(t)dt\right|=\frac{1}{k}\left|\int_{-a}^{a}\cos kt\cdot x'(t)dt\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{k}\int_{-a}^{a}|x'(t)|dt\to 0\quad(k\to\infty).$$

我们顺便请读者注意，这里$(F_k(t))$仅在点 $n\pi$ 处收敛.

现在我们要这样定义分布的导数，使得每个分布有一个导数，导数也是一个分布.

为了寻求启发，我们考虑在 R 上有连续导数的函数 $F(t)$，那么 F 生成一个正则分布 f，而由分部积分法，得到

$$-\int_{-\infty}^{\infty}F(t)x'(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}F'(t)x(t)dt.$$

所以，在一般情况下，自然想到由 $f'(x)=f(-x')$来定义 f'. 因为当 $x\in D$ 时，$-x'\in D$，我们看到 f' 在 D 上有意义. 显然 f' 是线性的，而且如果 $x_n\to 0$(在 D 中)，那么$-x_n'\to 0$(在 D 中). 因此，由 f 的连续性，$f(-x_n')\to 0$，即 $f'(x_n)\to 0$. 于是 $f'\in D'$.

例 18 (i) $\delta'(x)=\delta(-x')=-x'(0)$.

(ii) 考虑 Heaviside 单位阶梯函数 1_+，它是由 $1_+(0)=\frac{1}{2}$，$1_+(t)=1$ $(t>0)$，$1_+(t)=0$ $(t<0)$定义的，那么 1_+ 生成正则分布 $H(x)=\int_0^{\infty}x(t)dt$. 它就称为 Heaviside 分布. 于是我们有 $H'(x)=\delta(x)$，因为

$$H'(x)=-\int_0^{\infty}x'(t)dt=-\left\{\lim_{T\to\infty}x(T)-x(0)\right\}$$
$$=x(0)=\delta(x).$$

分布理论的主要优点之一是任一收敛的分布级数都可以逐项求导数. 当然这样的运算方法在普通的分析中一般不适用.

定理 8 (i) 如果 $f_k\to f$(在 D' 中)，那么 $f_k'\to f'$ (在 D 中).

(ii) 如果 $\sum g_k=g$ (在 D' 中)，那么 $\sum g_k'=g'$ (在 D' 中).

证明 (i) 因为当 $x\in D$ 时，$-x'\in D$，所以对于每个 $x\in D$，当 $k\to\infty$ 时，$f'_k(x)\to f'(x)$，即 $f'_k\to f'$(在 D 中)。

(ii) 记
$$f_k(x)=\sum_{n=1}^{k} g_n(x),$$
并应用结论(i)及
$$f'_k(x)=\sum_{n=1}^{k} g'_n(x),$$
(ii)即得证。

例 19 设 $F_k(t)=(\sin kt)/\pi t$，并假设 f_k 是对应于 F_k 的正则分布，那么不难证明对于每个 $x\in D$ $f_k(x)\to x(0)$ $(k\to\infty)$。从而 $f_k\to\delta$(在 D' 中)。由定理 8(i)得到 $f'_k\to\delta'$(在 D' 中)。

习 题 5

1. 证明例 12 中的函数 $x(t)$是 D 的一个元素。

2. 构造一个在 D 中的函数，当 $|t|\geqslant 2$ 时等于 0，当 $|t|\leqslant 1$ 时等于 1。

3. 指出下列等式中哪一些定义分布：(i) $f(x)=\{x(0)\}^2$，(ii) $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{(k)}(0)$，(iii) $f(x)=\sup\{x(t)/t\in R\}$。

4. 设$(F_k(t))$在任一有限区间上 Lebesgue 可积，并假设在 R 上几乎处处 $F_k(t)\to F(t)$。还假设$|F_k(t)|\leqslant g(t)$，其中 g 在 R 上 Lebesgue 可积。证明 $f_k\to f$(在 D' 中)，其中 f_k，f 是由 F_k，F 生成的正则分布。提示：应用 Lebesgue 的控制收敛定理(参看 Rudin 的书)。

5. 当 $|t|<\frac{1}{k}$ 时，定义 $F_k(t)=\frac{k}{2}$，当$|t|\geqslant\frac{1}{k}$ 时，定义 $F_k(t)=0$。证明由(F_k)生成的正则分布序列(f_k)收敛于 δ-分布。

6. 设 $F_k(t)=(k/\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-kt^2}$，做第 5 题。又证明对于每个 $x\in D$，$f_k(x)=x(0)+O(k^{\frac{1}{2}})$。

7. 设 $F_k(t)$为例 19 的形式，做第 5 题。对于 $k=1, 3, 6$，画出 $F_k(t)$ 的略图。

第四章　赋范线性空间

§1　收敛性与完备性

本章我们主要讨论赋范线性空间. 线性空间已经在第三章中定义了, 以后如果没有特别说明,总假定它是复线性空间,即标量乘数是复数. 线性空间 X 上的范数$\|\cdot\|$也在该章中定义了, 而赋范线性空间就是对$(X, \|\cdot\|)$. 概括地说:

赋范线性空间　赋范线性空间$(X, \|\cdot\|)$是复(或实)线性空间 X 和范数$\|\cdot\|: X\to R$, 满足: $\|x\|=0$ 仅当 $x=\theta$, $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$ 和$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

注意$\|\theta\|=0$ 和 $\|x\|\geqslant 0$ 对 X 中的一切 x 成立. 有时用到比赋范线性空间稍广的概念,这就是 p-赋范空间,在此空间中, 绝对齐次性稍有改变. 以后我们经常把"赋范线性空间"简称为"赋范空间".

p-赋范空间　设 X 是线性空间, $\|\cdot\|: X\to R$ 且 $p>0$. 那么, $(X, \|\cdot\|, p)$是 p-赋范空间当且仅当(i) $\|x\|=0$ 仅当 $x=\theta$,(ii) $\|\lambda x\|=|\lambda|^p\|x\|$, (iii) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

p-范数必是非负的, 为方便起见,我们对于 p-范数和 1-范数即范数用同样记号表示. 这样做并不会引起混乱, 因为以后我们将明确地说明用的是哪种范数.

在上面的定义中, 如果我们保留(ii)和(iii)而抛弃(i), 那么我们就得到 p-半赋范空间. 于是 1-半赋范空间就称为半赋范空间.

例 1　设 $0<p<1$. 那么,第二章中的 l_p 空间是 p-赋范空间,其中 p-范数

$$\|x\| = \sum |x_k|^p \quad (x \in l_p).$$

自然，当 $p=1$ 时，$\|x\|$是 l_1 的范数.

下一定理表明，p-赋范空间是一特殊类型的度量空间.

定理 1 p-赋范空间是度量空间，具有 $d(x, y) = \|x-y\|$ 且 $\|x\| = d(x, \theta)$. 但其逆一般不真.

证明 第一部分是显然的. 现说明第二部分. 如果(X, d)是线性空间而且是度量空间，我们记 $g(x) = d(x, \theta)$，那么 g 一般不是范数. 例如，取 $X = l(p)$，其中 $p_k = k^{-1}$，并且

$$d(x, y) = \sum |x_k - y_k|^{p_k}.$$

我们由前一章知道，$l(p)$是线性度量空间. 现在 g 不是绝对齐次的，例如，如果 $x = (0, 1, 0, 0, \cdots) \in l(p)$，那么 $g(2x) < 2g(x)$. 所以 g 不是范数. 同样可证，对任何固定 $q > 0$，g 不是 q-范数.

在第二章中给出的几乎所有度量空间的例都是"自然"赋范空间. 一旦引入线性结构，令$\|x\| = d(x, \theta)$就得到赋范线性空间. 这并不是对所有的例都适合，如 s，$l(p)$（一般的）和 I 就是例外.

如果象在第三章那样定义代数运算加法和标量乘法，那么，一些明显的例子是

$\|x\| = \sup|x_n|$ 在 c 和 l_∞ 中，

$\|x\| = \max|x_n|$ 在 c_0 中，

$\|x\| = \max|x(t)|$ 在 $C[0, 1]$中，

$\|x\| = (\sum|x_k|^p)^{1/p}$ 在 $l_p (p \geqslant 1)$中，

$\|x\| = \max|x(t)|$ 在 $C(K)$中，K 是紧致的.

在赋范空间中，只要用到拓扑概念，我们总认为所讨论的拓扑是由范数产生的度量拓扑. 例如 $S(\theta, 1)$是单位球

$$\{x \mid d(x, \theta) < 1\} = \{x \mid \|x\| < 1\}.$$

赋范空间最重要的类型也许要算完备赋范空间（作为度量空间）. 为了纪念 Banach，我们把这样的空间称为

Banach 空间　Banach 空间 X 是完备赋范空间. 完备性指的是: 如果 $\|x_m-x_n\|\to 0\ (m,\ n\to\infty)$, 这里 $x_n\in X$, 那么存在 $x\in X$, 使得 $\|x_n-x\|\to 0\ (n\to\infty)$.

例 2 在前面一些例子中, R, C, l_∞, $l_p(p\geqslant 1)$, c, c_0 和 $C[a,b]$ 都是 Banach 空间.

然而有许多结果或定义, 在没有假定完备性的情况下也是成立的. 因此, 只有在必要的时候我们才用到完备性.

在赋范空间中, 可以用自然的方式定义级数的收敛性与绝对收敛性.

赋范空间中的级数　设 X 是赋范空间, 我们称级数

$$\sum x_n=\sum_{n=1}^{\infty}x_n,\quad x_n\in X$$

收敛于 $s\in X$ (记作 $\sum x_n=s$), 当且仅当

$$(s_n)=(x_1,\ x_1+x_2,\ x_1+x_2+x_3,\ \cdots)$$

收敛于 s, 即 $\|s_n-s\|\to 0\ \ (n\to\infty)$.

级数 $\sum x_n$ 称为绝对收敛的, 当且仅当 $\sum\|x_n\|<\infty$.

在 R 中, 每一个绝对收敛级数都收敛. 这依赖于 R 的完备性. 下面定理给出 Banach 空间由级数表示的特性.

定理 2 赋范空间 X 是完备的, 当且仅当每一个绝对收敛级数都收敛.

证明 (i) 设 X 是完备的且 $\sum x_n$ 绝对收敛. 那么, 由实级数的一般收敛原则: 对 $n>m$, $\|s_n-s_m\|=\|x_{m+1}+\cdots+x_n\|\leqslant\|x_{m+1}\|+\cdots+\|x_n\|\to 0\ \ (m\to\infty)$. 因此 (s_n) 是 Cauchy 序列, 所以收敛, 即 $\sum x_n$ 收敛.

(ii) 设每一个绝对收敛级数都收敛. 如果 (x_n) 是 X 中的 Cauchy 序列, 那么, 我们可以找到 $n_1<n_2<\cdots$ 使得

$$\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|<2^{-k}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots),$$

因此 $$\sum_1^{\infty}\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|<\infty.$$

由我们的假设得到 $\sum(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$ 收敛. 把上面最后这个级数展开, 我们看出 (x_{n_k}) 收敛. 因此 Cauchy 序列 (x_n) 有一个收敛的子序列 (x_{n_k}), 于是, 由第二章 § 2 定理 2 知, 整个序列 (x_n) 收敛. 因而, X 是完备的.

注意, 定理 2 的证明没有用到范数的绝对齐次性. 事实上, 这个结果在更一般的情况下, 用任意非负次可加函数 $g: X\to R$ 来代替范数仍成立. 不过, 在这种情况下极限可能不唯一.

作为定理 2 应用的例, 我们考虑 Lebesgue 积分空间 $L_p[0,1]$ 的完备性.

空间 $L_p[0, 1], p<1$ 这是一个古典的 Banach 空间. L_p 的元素是函数 x, 它使 $|x|^p$ 在 $[0, 1]$ 上 Lebesgue 可积, 即 $x\in L_p$ 当且仅当

$$\int_0^1|x(t)|^p dt<\infty.$$

在 L_p 上, 自然的半范数是

$$\|x\|=\left(\int_0^1|x(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

这不是范数, 因为由 $\|x\|=0$ 只能得出 $x(t)=0$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处成立. 然而, 假如我们希望从 L_p 空间构造赋范空间, 可以象第二章例 6 那样来考虑等价类. 在这种情况下, 三角不等式 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ 就是 Lebesgue 积分的 Minkowski 不等式.

为了证明空间 L_p 依上面给出的半范数的完备性, 我们需要用到 Lebesgue 积分的一个基本定理, 即 Lebesgue 单调收敛定理. 下面我们叙述这个定理以及它的两个直接推论. 证明可以从 W. Rudin 著的《数学分析原理》中找到.

Lebesgue 单调收敛定理 如果 (x_n) 是 $[0, 1]$ 上的可测函数序

列，使得在 $[0, 1]$ 上 $0\leqslant x_1(t)\leqslant x_2(t)\leqslant\cdots$ 且 $\lim_n x_n(t)=x(t)$，那么

$$\lim_n\int_0^1 x_n(t)dt=\int_0^1 x(t)dt.$$

推论 1 如果 (x_n) 是 $[0, 1]$ 上的可测非负函数序列，且

$$x(t)=\sum_1^\infty x_n(t),$$

那么
$$\int_0^1 x(t)dt=\sum_1^\infty\int_0^1 x_n(t)dt.$$

推论 2 (Fatou 引理) 如果 (x_n) 是 $[0, 1]$ 上的可测非负函数序列，且在 $[0, 1]$ 上 $x(t)=\liminf_n x_n(t)$，那么

$$\int_0^1 x(t)dt\leqslant\liminf_n\int_0^1 x_n(t)dt.$$

现在我们能够应用定理 2 去证明 L_p 是完备空间. 取任何绝对收敛级数 $\sum x_k$，这里 $x_k\in L_p$ $(k=1, 2, \cdots)$. 下面我们要证明存在 $s\in L_p$ 使得 $s=\sum x_k$（这里收敛性指依 L_p 的半范数收敛）. 由假设知 $\sum\|x_k\|<\infty$，因此，存在 N 使得

$$\sum_{k=m+1}^\infty\|x_k\|<\varepsilon\quad(m>N).$$

由 Hölder 不等式（积分形式）：

$$\int_0^1|x_k(t)|dt\leqslant\|x_k\|\left(\int_0^1 1\cdot dt\right)^{1/q}=\|x_k\|,$$

由上面推论 1，得

$$\int\sum|x_k(t)|dt=\sum\int|x_k(t)|dt\leqslant\sum\|x_k\|<\infty.$$

由此可得，在 $[0, 1]$ 上 $\sum|x_k(t)|<\infty$ 几乎处处成立. 因为如果在正测度集上 $\sum|x_k(t)|=\infty$，那么 $\int\sum|x_k(t)|dt=\infty$，这与上面得到的式子矛盾. 因此，$\sum x_k(t)$ 几乎处处收敛，即存在 $s(t)$，使

$$\lim_n\sum_{k=1}^n x_k(t)=s(t)$$

几乎处处成立．现取 $m>N$, 那么, 由推论 2,

$$\left\|s-\sum_1^m x_k\right\|^p=\int\left|s(t)-\sum_1^m x_k(t)\right|^p dt$$

$$=\int \lim_n \left|\sum_1^n x_k(t)-\sum_1^m x_k(t)\right|^p dt$$

$$\leqslant \liminf_n \int\left|\sum_{m+1}^n x_k(t)\right|^p dt$$

但
$$\int\left|\sum_{m+1}^n x_k(t)\right|^p dt=\left\|\sum_{m+1}^n x_k\right\|^p$$

所以
$$\left\|s-\sum_1^m x_k\right\|^p\leqslant \liminf_n\left(\sum_{m+1}^n \|x_k\|\right)^p<\varepsilon^p.$$

这意味着
$$\sum_1^m x_k\to s,$$

收敛性是指依空间 L_p 的半范数收敛．最后, 我们得到, 对 $m>N$,

$$\|s\|\leqslant\left\|s-\sum_1^m x_k\right\|+\sum_1^m\|x_k\|<\varepsilon+\sum_1^\infty\|x_k\|<\infty,$$

因此 $s\in L_p$．因而 L_p 是完备空间．

在 Fourier 级数理论中, 上述结果当 $p=2$ 的情况是重要的, 它与 Riesz-Fischer 定理有关系．关于这方面的内容将在后面讨论 Hilbert 空间的第六章中详细论述．

假如已给一个赋范空间 X, 总可以由它构造出另外的赋范空间, 这些空间叫做

赋范商空间　设 X 是赋范空间, M 是 X 的闭子空间．定义 $x_1\equiv x_2 (\bmod M)$ 为 $x_1-x_2\in M$．那么, "$\equiv$"确定了一个等价关系与 X 模 M 的商空间 X/M, 这个商空间是所有等价类 E_x 的集合．在 X/M 上的范数由

$$\|E_x\|=\inf\{\|y\| \mid y\in E_x\} \tag{1}$$

来定义．

第三章曾指出, 在 $E_x+E_y=E_{x+y}$, $\lambda E_x=E_{\lambda x}$ 这样的规定下,

X/M 是线性空间. 现在我们验证(1)是 X/M 上的范数. 作为范例,我们证明当 $\|E\|=0$ 时有 $E=M$, 即 X/M 中的零, 而且还验证三角不等式.

设 $\|E\|=0$, 那么, 存在序列 $(x_n)\in E$ 使得 $x_n\to\theta$. 因为 M 是闭的, 显然 E 也是闭的, 所以 $\theta\in E$, 于是 $E=E_\theta=M$.

设 E, F 是 X/M 的元. 由(1), 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $x\in E$, $y\in F$ 使得

$$\|x\|<\|E\|+\varepsilon, \quad \|y\|<\|F\|+\varepsilon,$$

于是
$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|<\|E\|+\|F\|+2\varepsilon.$$

但 $x+y\in E+F$, 所以 $\|E+F\|\leqslant\|x+y\|$. 由 ε 的任意性, 于是有

$$\|E+F\|\leqslant\|E\|+\|F\|.$$

如果 X 是 Banach 空间, 那么, 赋范商空间 X/M 也是 Banach 空间.

定理 3 如果 X 是 Banach 空间, M 是 X 的闭子空间, 那么 X/M 也是 Banach 空间, 范数的规定如上.

证明 我们将用定理 2 并证明如果 $\sum\|E(k)\|<\infty$, 那么 $\sum E(k)$ 也收敛, 这里 $E(k)\in X/M$ $(k=1, 2, \cdots)$. 由 $\|E(k)\|$ 的定义知道, 存在 $x_k\in E(k)$ 使得

$$\|x_k\|<\|E(k)\|+2^{-k} \quad (k=1, 2, \cdots).$$

因此, $\sum\|x_k\|<1+\sum\|E(k)\|<\infty$ 并且根据定理 2, 由 X 的完备性可推出 $\sum x_k$ 收敛, 比如说收敛于 x, 即 $\sum x_k=x$. 设 E_x 是含有这个 x 的等价类, 那么, 我们将证明 $\sum E(k)=E_x$, 即

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}E(k)\to E_x \quad (n\to\infty).$$

因为
$$s_n-E_x=E(1)+\cdots+E(n)-Ex$$
$$=E_{x_1}+\cdots+E_{x_n}-E_x=E_{x_1+\cdots+x_n-x}.$$

由(1)及 $\sum x_n = x$，有

$$\|s_n - E_x\| \leqslant \|x_1 + \cdots + x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

因此，在 X/M 中每一个绝对收敛级数都收敛，即 X/M 是完备的. 这就证明了定理.

习 题 1

1. 在赋范商空间中，证明当 M 是闭的，每一等价类 E_x 也是闭的. 并证明 $\|\lambda E\| = |\lambda| \|E\|$，$\|E\|$ 的定义由 § 1 给出.

2. 在 l_2 中设 M 是所有序列 $x = (x_1, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)$ 的集合，这些序列中的非零项数目只有有限个. 证明 M 是 l_2 的非闭的线性子空间. 提示：考虑 M 中的序列 $x_1 = (1, 0, 0, \cdots)$，$x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \cdots\right)$，$x_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0, \cdots\right), \cdots$.

3. 在赋范空间中，证明

(i) $\|x - y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||$，

(ii) 如果 $x_n \to x$，那么 $\|x_n\| \to \|x\|$，

(iii) 如果 $\lambda_n \to \lambda$，$\mu_n \to \mu$(在 C 中)且 $x_n \to x$，$y_n \to y$，那么，$\lambda_n x_n + \mu_n y_n \to \lambda x + \mu y$，

(iv) 如果 $x_n \to x$，那么 $x_n/\|x_n\| \to x/\|x\|$，这里要求 $\|x_n\| \neq 0$，$\|x\| \neq 0$.

4. 设 X 是 Banach 空间，并假定赋范空间 Y 与 X 是等距的. 证明 Y 是 Banach 空间.

5. 证明 $l_p (0 < p < 1)$ 是完备 p-赋范空间.

6. 设 S 表示 $[0, 1]$ 上所有实连续函数 $x = x(t)$ 的集合. 证明

$$\|x\| = \left(\int_0^1 x^2(t) dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

是 S 上的范数，但 S 在这种范数下不完备. 提示：考虑在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上，$x_n(t) = 1$，在 $\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n, 1\right]$ 上 $x_n(t) = 0$，由点 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 到点 $\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n, 0\right)$ 画一直线以完成 x_n 的定义.

7. 在赋范空间中，证明如果 $\sum x_n$ 收敛，则 $\|\sum x_n\| \leqslant \sum \|x_n\|$.

8. 设 $\sum (x_n - x_{n+1})$ 在赋范空间中绝对收敛. 问 (x_n) 是 Cauchy 序列吗?

(x_n)收敛吗?

9. 设 $e_1=(1, 0, 0, \cdots)$, $e_2=(0, 1, 0, \cdots)$, $e_3=(0, 0, 1, 0, \cdots)$, $\cdots$. 证明

$$\sum \frac{e_k}{k\log(k+1)}$$

在 c_0 中收敛,但不绝对收敛. 并求这个级数的和.

10. M 是赋范空间的一个子空间. 证明 M 的闭包 $\overline{M}$ 是闭子空间.

11. 设 S 是赋范空间 X 的一个稠密子集, 证明 X 的每个元素可以写为一个绝对收敛级数的和,而这个级数的项是属于 S 的.

12. 对任意 $p>0$, w_p 是满足下述条件的所有序列$x=(x_k)$的集合. 这条件是存在一个数 l,使得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-l|^p\to 0 \quad (n\to\infty).$$

证明:如果 $x\in w_p$,那么 l 是唯一的. 并证明在通常的运算 $\lambda(x_k)=(\lambda x_k)$, $(x_k)+(y_k)=(x_k+y_k)$下 w_p 是线性空间.

规定 $$\|x\|=\sup_n\left(n^{-1}\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} \quad (1\leqslant p<\infty),$$

$$\|x\|=\sup_n n^{-1}\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p \quad (0<p<1).$$

证明当 $p\geqslant 1$ 时,$\|x\|$是范数;当 $0<p<1$ 时, $\|x\|$是 p-范数. 并证明当 $p\geqslant 1$ 时,w_p 是 Banach 空间;当 $0<p<1$ 时,w_p 是完备的 p-赋范空间.

对 w_p 空间的一些性质我们将在第七章作进一步的探讨.

13. 设 $X\neq\{\theta\}$是赋范空间. 证明 X 是 Banach 空间的充要条件是集合$\{x\in X \mid \|x\|=1\}$是完备的.

§2 线性算子和线性泛函

在分析的许多问题中,我们发现,需要考虑在某线性空间上的线性算子,它在另一线性空间(可能是同一空间)中取值. 例如,在积分方程论中,出现由

$$(Ax)(s)=\int_0^1 a(s, t)x(t)dt$$

定义的这类算子 A. 在这个方程中, 我们把 $a(s, t)$看作$[0, 1]\times[0, 1]$上已知的连续函数,且 $x(t)$在$[0,1]$上连续. 那么,显然 Ax

是 $s\in[0, 1]$的连续函数，所以

$$A:C[0, 1]\to C[0, 1].$$

因为函数 A 作用在每一 x 上，使它成为另一连续函数，我们有理由称 A 为算子，这正是泛函分析中通常的说法. 由积分的"线性"性质，我们看到 A 在

$$A(\lambda x+\mu y)=\lambda A(x)+\mu A(y)$$

的意义上是线性算子，这里 λ, μ 为标量，函数 $x, y\in C[0, 1]$.

在本章和后面各章我们将研究许多特殊类型的线性算子. 第七章专讲用无限矩阵定义的线性算子. 目前讨论一些一般定义和性质.

线性算子 设 X, Y 是线性空间，函数 $A:X\to Y$ 称为线性算子(或映射，变换)当且仅当对任意的 $x_1, x_2\in X$ 和任意标量 λ, μ

$$A(\lambda x_1+\mu x_2)=\lambda A(x_1)+\mu A(x_2). \tag{2}$$

线性泛函 如果 $A:X\to C$ 是线性算子，那么 A 称为 X 上的线性泛函，即线性泛函是复值线性算子.

算子的核 算子 A 的核定义为

$$\operatorname{Ker}(A)=\{x\in X \mid A(x)=\theta\}.$$

线性算子的核显然是 X 的子空间.

注意 我们通常假定 X 是复线性空间. 如果 X 是实线性空间，那么线性泛函定义为 X 上的实值线性算子.

例 3 (i) 设 I 是 C 上所有整函数 f 组成的空间，那么，由 $A(f)=f'$ 定义的微分算子 $A:I\to I$ 是 I 到自身中的线性算子. 算子的线性性质是大家熟悉的，但 f' 是一个整函数并不显然. 这个结论是从复变量中关于在一个区域上解析的函数无限可微这个著名的定理得到的(见 Ahlfors«复分析»).

(ii) 如果 c 是由收敛序列 $x=(x_n)$ 组成的空间，那么 $A(x)=\lim x_n$ 是 c 上的线性泛函. 另一个 c 上线性泛函的例子是

$B: c \to C$，由

$$B(x)=\sum n^{-2}x_n$$

给出．对 c 中每一 x，该级数是绝对收敛的．

(iii) 一般线性算子 $A: X \to Y$ 具有性质 $A(\theta)=\theta$，这只要在(2)中令 $\lambda=\mu=0$ 就显然了．我们通常不区别在 X 和在 Y 中的零，这不致引起混乱．

在赋范空间上的线性连续算子是特别重要的．连续性要理解为由范数给出的度量连续性．因而，$A: X \to Y$ 在 $x_0 \in X$ 连续是指：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(x_0, \varepsilon)$，只要 $\|x-x_0\|<\delta$，总有 $\|A(x)-A(x_0)\|<\varepsilon$．这里和以后我们通常不费精神去分清 X 和 Y 的范数．

赋范空间上的另一类算子是有界线性算子，它们实际上与连续线性算子是一回事．

有界线性算子　线性算子 $A: X \to Y$ 称为有界的，当且仅当存在常数 M，使得对所有的 $x \in X$，

$$\|A(x)\| \leqslant M\|x\|.$$

我们应当注意上述这个有界性定义不同于普通复函数有界性的定义：对某一集上所有的 z，$|f(z)| \leqslant M$．还要注意在 X 上有界的泛函满足 $|f(x)| \leqslant M\|x\|$，对所有的 $x \in X$．

例 4　例 3(ii) 的算子 A 和 B 在 c 上是有界线性泛函．因为 $\|x\|=\sup|x_n|$，所以对所有的 n，$|x_n| \leqslant \|x\|$，于是在 c 上，$|A(x)|=\lim|x_n| \leqslant \|x\|$．另外，

$$|B(x)| \leqslant \sum n^{-2}|x_n| \leqslant \frac{\pi^2}{6}\|x\|.$$

现在我们给出连续线性算子的一些性质．

定理 4　设 X，Y 是赋范空间，且 $A: X \to Y$ 是线性算子，则

(i) 由 A 在原点连续可推出 A 在 X 上一致连续．

(ii) A 在 X 上是连续的当且仅当它是有界的.

证明 (i) 由假设可知，当$\|x\|<\delta$ 时有$\|A(x)\|<\varepsilon$. 因此，如果$\|x-y\|<\delta$,那么,由 A 的线性性质,

$$\|A(x-y)\|=\|A(x)-A(y)\|<\varepsilon.$$

(ii) 首先设 A 有界: 在 X 上,$\|A(x)\|<M\|x\|$. 如果$\|x-y\|<\varepsilon/M$,那么

$$\|A(x)-A(y)\|=\|A(x-y)\|\leqslant M\|x-y\|<\varepsilon.$$

因此 A 一致连续.

现在假设 A 在 X 上连续，那么它在 θ 连续，于是存在 $\delta=\delta(1)$,当$\|x\|<\delta$ 时有$\|A(x)\|<1$. 任取 $x\neq\theta$,那么

$$\left\|\frac{\delta x}{2\|x\|}\right\|=\frac{\delta}{2},$$

所以
$$\left\|A\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right)\right\|<1,\quad \|A(x)\|<\frac{2}{\delta}\|x\|.$$

如果 $x=\theta$,则$\|A(x)\|=0$. 所以在 X 上,$\|A(x)\|\leqslant 2\delta^{-1}\|x\|$,即 A 有界.

对于半范数,有类似于定理 4(i)的结果.

定理 5 设 p 是 X 上的半范数,则 p 在 X 上是连续的当且仅当它在原点是连续的. 这还等价于 p 的有界性,即在 X 上对某个 M, $p(x)\leqslant M\|x\|$.

证明 如果 p 在 X 上连续,那么它当然在原点连续. 反之,如果 p 在原点连续，那么，我们用定理 4(ii)的论证，证得在 X 上 $p(x)\leqslant 2\delta^{-1}\|x\|$. 又因 $|p(x)-p(y)|\leqslant p(x-y)$, 所以 p 确实在 X 上一致连续.

我们现在知道，在赋范空间上的连续线性算子与有界线性算子是一回事. 描述连续线性泛函的另一种方法是考虑它的核.

定理 6 设 A: $X\to C$ 是线性的，则 A 是连续的当且仅当

Ker(A)是闭的.

证明 （i） 设 A 连续,那么,因为 $\text{Ker}(A)=A^{-1}(\{0\})$，它是闭集$\{0\}$的逆象,所以我们得到 Ker$(A)$是闭的.

另一种证明方法是设 $x\in\overline{\text{Ker}(A)}$，那么,存在$(x_n)\in\text{Ker}(A)$使得 $x_n\to x$. 因为 A 连续且 $A(x_n)=0$，所以，$A(x)=0$，即 $x\in\text{Ker}(A)$,因此 Ker(A)是闭的.

我们注意,如果 C 由任意赋范空间 Y 来代替,上面的论证可同样进行.

（ii） 现设 Ker(A)是闭集. 如果 $A\equiv0$,那么 A 连续. 如果 $A\neq0$,那么$\sim\text{Ker}(A)$是非空开集. 于是,在$\sim\text{Ker}(A)$内存在 a 使得$A(a)\neq0$. 因此 $A(b)=1$，这里 $b=a/A(a)\in\sim\text{Ker}(A)$. 因而存在 $S(b,\ r)\subset\sim\text{Ker}(A)$.

我们马上要证明

$$S(\theta,\ r)\subset V=\{x\mid |A(x)|<1\}. \tag{3}$$

从这可推得当$\|x\|<r$ 时$|A(x)|<1$，因此由定理 4(ii)的论证，我们得到在 X 上$|A(x)|\leqslant 2r^{-1}\|x\|$,即 A 在 X 上连续.

为了证明(3),取 $x\in S(\theta,\ r)$并假定 $x\notin V$,那么

$$y=-x/A(x)\in S(\theta,\ r) \quad 和 \quad A(b+y)=1+A(y)=0.$$

而且,因为$\|y\|<r$，所以 $b+y\in S(b,\ r)$. 结合这两个结果我们得到 $b+y\in\text{Ker}(A)$与 $b+y\in S(b,\ r)$,这意味着

$$\text{Ker}(A)\cap S(b,\ r)\neq\emptyset.$$

但这与 $S(b,\ r)\subset\sim\text{Ker}(A)$的事实矛盾. 因此 $x\in S(\theta,\ r)$蕴涵 $x\in V$,这就证明了(3),因而定理得到证明(见(3)后面的说明).

在继续讨论之前,我们先规定某些术语和记号.

$\boldsymbol{L(X,\ Y)}$ 设 $X,\ Y$ 是线性空间,那么 $L(X,\ Y)$表示 X 到 Y 中的所有线性算子的集合.

$\boldsymbol{X^\dagger}$ 这是 $L(X,\ C)$,即 X 上所有线性泛函的集合. 通常称

$X^\dagger$ 为 X 的代数对偶.

$\boldsymbol{B(X, Y)}$ 设 X, Y 是赋范空间,那么 $B(X, Y)$表示由 X 到 Y 中的所有有界(即连续)线性算子的集合.

$\boldsymbol{X^*}$ 这是 $B(X, C)$,即 X 上所有有界线性泛函的集合. 我们称 X^* 为 X 的对偶(或连续对偶).

对任何赋范空间 X, Y,显然有

$$B(X, Y) \subset L(X, Y).$$

在一般情况下,包含是严格的,如下例所示.

例 5 $X^* \subset X^\dagger$ 是严格包含的,此处 $X = l_1$, 具有 l_∞ 的范数. 这只要考虑关系式

$$f(x) = \sum x_k \quad (x \in l_1)$$

就可得到证明. 显然 $f: l_1 \to C$ 且在 l_1 上 f 是线性的. 然而 f 是无界的. 因为, 假定 f 有界, 那么, 就存在一个整数 N, 使得对 l_1 中所有的 x, $|f(x)| \leqslant N\|x\|$. 设 $y \in l_1$ 是由

$$y_k = 1 \quad (1 \leqslant k \leqslant N+1), \quad y_k = 0 \quad (k > N+1)$$

来定义的. 那么, $\|y\| = \sup|y_k| = 1$, $f(y) = N+1$, 而由我们的假定得 $N+1 \leqslant N$, 这是矛盾的, 因此 f 无界.

我们可能注意到例 5 中的赋范空间 X 是无限维的. 对有限维空间来说则 $X^* = X^\dagger$ 总成立, 即在 X 上每个线性泛函必然连续(见习题 2 第 10 题).

上面定义的集合 $L(X, Y)$和 $B(X, Y)$是函数(算子)的集合, 这些函数的值属于线性空间 Y. 因此, 很自然要使这些集合成为线性空间, 这只要用

$$(\lambda A + \mu B)(x) = \lambda A(x) + \mu B(x)$$

来定义 $\lambda A + \mu B$, 其中 $A, B \in L(X, Y)$. 显然, $\lambda A + \mu B \in L(X, Y)$, 因此 $L(X, Y)$ 是一线性空间. 而且, 容易证明 $B(X, Y)$是 $L(X, Y)$的线性子空间.

为了使 $B(X, Y)$ 成为赋范空间，我们必须引进元素 $A\in B(X,Y)$ 的范数.

有界算子的范数 设 $A\in B(X, Y)$，那么 A 的范数定义为

$$\|A\|=\sup_{x\neq\theta}\frac{\|A(x)\|}{\|x\|}<\infty.$$

从下面事实

$$\|A(x)\|\leqslant M\|x\| \quad 当\ A\in B(X, Y)$$

看到，上确界是有限的.

现在我们证明 $\|A\|$ 确实是 $B(X, Y)$ 上的范数，还证明不论 X 是否为 Banach 空间，只要 Y 是 Banach 空间，那么 $B(X, Y)$ 也是 Banach 空间.

定理 7 (i) 设 X, Y 是赋范空间，$B(X, Y)$ 是由 X 到 Y 中的所有有界线性算子构成的线性空间，那么 $B(X, Y)$ 是赋范空间，具有

$$\|A\|=\sup\{\|A(x)\|/\|x\| \mid x\neq\theta\}; \ A\in B(X, Y).$$

(ii) 如果 Y 是 Banach 空间，那么 $B(X, Y)$ 也是 Banach 空间，它的范数如(i)中说的.

证明 (i) 假如 $A_1, A_2\in B(X, Y)$，那么对一切 $x\in X$，

$$\|A_1(x)\|\leqslant\|A_1\|\|x\| \quad 和 \quad \|A_2(x)\|\leqslant\|A_2\|\|x\|.$$

因此，对一切 $x\in X$，

$$\|(A_1+A_2)(x)\|=\|A_1(x)+A_2(x)\|\leqslant(\|A_1\|+\|A_2\|)\|x\|,$$

从而推出 $\|A_1+A_2\|\leqslant\|A_1\|+\|A_2\|$. 显然 $\|\lambda A\|=|\lambda|\|A\|$. 剩下要证明当 $\|A\|=0$ 时，$A\equiv\theta$. 事实上，当 $\|A\|=0$ 时，从 $\|A(x)\|\leqslant\|A\|\|x\|$ 立即得到：在 X 上 $A(x)=\theta$，即 $A\equiv\theta$.

(ii) 设 (A_n) 是 $B(X, Y)$ 中的 Cauchy 序列，那么，对每一 $x\in X$，

$$\|A_n(x)-A_m(x)\|\leqslant\|A_n-A_m\|\cdot\|x\|\to 0 \quad (n, m\to\infty),$$

所以$(A_n(x))$是 Y 中的 Cauchy 序列,因此 $\lim_n A_n(x)$存在，记为 $A(x)$，即 $\lim_n A_n(x)=A(x)$．现在我们要证明 $A\in B(X, Y)$，以及依 $B(X,Y)$的范数 $A_n\to A$. 因为 A_n 是线性的，我们有 $A_n(\lambda x+\mu x')=\lambda A_n(x)+\mu A_n(x')$，所以当 $n\to\infty$ 时，得到 $A(\lambda x+\mu x')=\lambda A(x)+\mu A(x')$，于是，$A\in L(X, Y)$．又 A 是有界的，这是因为

$$\|A(x)\|=\lim_n\|A_n(x)\|\leqslant\|x\|+\|A_N\|\|x\|,$$

这里 $N=N(1)$来自关于(A_n)的 Cauchy 条件.

现在，对每一$x\in X$ 及所有的 $n, m\geqslant N(\varepsilon)$，$\|A_n(x)-A_m(x)\|\leqslant\varepsilon\|x\|$．让 $m\to\infty$ 我们得到

$$\|A_n(x)-A(x)\|\leqslant\varepsilon\|x\|,$$

所以，对所有的 $n\geqslant N(\varepsilon)$，$\|A_n-A\|\leqslant\varepsilon$，因而，依 $B(X, Y)$的范数 $A_n\to A$.

推论 赋范空间 X 的对偶 X^* 必为 Banach 空间，它的范数

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|/\|x\| \mid x\neq\theta\}.$$

证明 在定理 7 中令 $Y=C$，并且回想一下 C 依模范数是完备空间.

从一般观点来说，我们想要知道的关于 $B(X, Y)$和 X^* 的大部分内容，定理 7 和它的推论已经告诉了我们．然而，如果给出赋范空间 X 的具体形式，比如 c, l_∞ 或 $C[0, 1]$，那么，我们特别感兴趣的是给出对偶空间 X^* 的明显特征，这并不都是容易办到的．实际上，就我们所掌握的理论来说，在上面举出的例子中，我们只能完全解决关于 c 的对偶问题．为了表示 l_∞ 的对偶空间的特征，我们需要知道一些测度理论(见 122 页所附的对偶空间表后的说明)．$C[0, 1]$的对偶空间将在我们证明 Hahn-Banach 扩张定理后再讨论(见下面 § 5).

在描述 c^* 的特征之前，我们引进等价赋范空间的概念，这个概念对于描述一般的对偶空间的特征是有用的.

等价赋范空间 赋范空间 X 和 Y 称为等价的，当且仅当它们是等距同构的，即存在一个线性等距 $T: X \to Y$.

注意 如果 T 是线性等距的，那么在 X 上 $\|T(x)\| = \|x\|$，因为 $T(\theta) = \theta$. 反之，如果 T 是线性的，且在 X 上 $\|T(x)\| = \|x\|$，那么

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| = \|x-y\|.$$

所以，假如 T 是满射的，那么它就是等距的. 因而 X 和 Y 等价，当且仅当存在一个保持范数的线性满射 $T: X \to Y$.

显然，如果 $X \sim Y$ 表示 X 和 Y 是等价赋范空间，那么，$\sim$ 是在所有赋范空间构成的族上的一个等价关系. 所以，从赋范空间理论的观点来看，X 和 Y 可以不加区别. 因此，当 $X \sim Y$，我们就可以认为 X 和 Y 是"等同"的. 有时甚至说 X 就是 Y，只要记住我们指的是什么就不会有什么害处.

现在我们证明 $c^* \sim l_1$. 按照上面一段的观点，我们说 c 的对偶是 l_1.

定理 8 (i) 如果 $f \in c^*$，那么存在一个数 a 和一个序列 $(a_n) \in l_1$，使得对所有 $x \in c$，

$$f(x) = a \lim x_n + \sum a_n x_n, \tag{4}$$

而且 f 的 c^*- 范数是

$$\|f\| = |a| + \sum |a_n|.$$

反过来，如果给出 a 和 $(a_n) \in l_1$，那么 (4) 的右端确定 c^* 的一个元.

(ii) c^* 与 l_1 等价.

证明 (i) 逆的部分是显然的.

假设 $f \in c^*$，我们从第三章知道，$(e, e_1, e_2, \cdots)$ 是 c 的一个基底：

$$x = le + \sum (x_n - l) e_n,$$

这里 $x=(x_n)\in c$, $l=\lim x_n$, $e=(1, 1, 1, \cdots)$, $e_1=(1, 0, 0, \cdots)$, $\cdots$. 由 f 的线性和连续性，对一切 $x\in c$，有

$$f(x)=lf(e)+\sum(x_n-l)f(e_n). \tag{5}$$

现取任意 $r\geqslant 1$，且对 $1\leqslant n\leqslant r$，令 $x_n=\operatorname{sgn}f(e_n)$①，对 $n>r$，令 $x_n=0$. 那么 $x\in c_0$, $\|x\|=1$，且因为在 c 上 $|f(x)|\leqslant\|f\|\|x\|$，所以

$$|f(x)|=\sum_{n=1}^{r}|f(e_n)|\leqslant\|f\|. \tag{6}$$

由(6)得到 $\quad \sum|f(e_n)|=\sup_r\sum_{n=1}^{r}|f(e_n)|\leqslant\|f\|<\infty.$

我们现在把(5)写成

$$f(x)=al+\sum a_n x_n, \tag{7}$$

这里 $a=f(e)-\sum f(e_n)$, $a_n=f(e_n)$，级数 $\sum f(e_n)$ 是绝对收敛的. 因为 $|\lim x_n|\leqslant\|x\|$，由(7)我们有

$$|f(x)|\leqslant(|a|+\sum|a_n|)\|x\|,$$

于是 $\|f\|\leqslant|a|+\sum|a_n|$. 另外，对于 $\|x\|=1$，我们有 $|f(x)|\leqslant\|f\|$，所以我们定义，对任意 $r\geqslant 1$，

$$x_n=\operatorname{sgn}a_n \quad (1\leqslant n\leqslant r),$$
$$\quad =\operatorname{sgn}a \quad (n>r).$$

那么 $x\in c$, $\|x\|=1$, $\lim x_n=\operatorname{sgn}a$，所以

$$|f(x)|=\left||a|+\sum_{n=1}^{r}|a_n|+\sum_{n=r+1}^{\infty}a_n\operatorname{sgn}a\right|\leqslant\|f\|.$$

因为 $(a_n)\in l_1$，我们有 $\sum\limits_{n=r+1}^{\infty}a_n\to 0\ (r\to\infty)$，因此，在最后的不等式中，令 $r\to\infty$，我们得到

$$|a|+\sum|a_n|\leqslant\|f\|.$$

结合前面的结果，我们得到 $\|f\|=|a|+\sum|a_n|$. 这就证明了(i).

---

① 对于复数 z 我们定义 $\operatorname{sgn}z=|z|/z\ (z\neq 0)$ 和 $\operatorname{sgn}0=1$. 那么，对所有的 z，我们有 $|\operatorname{sgn}z|=1$ 和 $z\operatorname{sgn}z=|z|$.

显而易见表示式(4)是唯一的. 在下面部分(ii)中要用到此唯一性.

(ii) 设 $T: c^* \to l_1$ 是由

$$T(f) = (a,\ a_1,\ a_2,\ \cdots)$$

来定义的, 这里 $a,\ a_n$ 为(i)的表示式中出现的. 由(i)我们有 $\|T(f)\| = |a| + |a_1| + |a_2| + \cdots = \|f\|$, $\|T(f)\|$ 是 l_1 的范数. 从而 T 保持范数不变. 由(i)中逆命题部分知 T 满射. 最后, 显见 T 是线性的, 例如, 如果 $f \in c^*$, 那么

$$T(\lambda f) = (\lambda a,\ \lambda a_1,\ \cdots) = \lambda(a,\ a_1,\ \cdots) = \lambda T(f).$$

T 的可加性可类似地证明.

下面我们列表给出至此介绍过的一些空间的对偶. 并在表后作一些注释.

对偶空间表

空　间	表示式	范　数	对　偶
c	$a \lim x_n + \sum a_n x_n$	$\|a\| + \sum \|a_n\|$	l_1
c_0	$\sum a_n x_n$	$\sum \|a_n\|$	l_1
$l_p\ (0<p\leqslant 1)$	$\sum a_n x_n$	$\sup_n \|a_n\|$	l_∞
$l_p\ (1<p<\infty)$	$\sum a_n x_n$	$(\sum \|a_n\|^q)^{1/q}$	l_q
l_∞	$\int_N x(k)\, d\mu$	$\int \|d\mu\|$	$\mathscr{M}$
$C[0,\ 1]$	$\int_0^1 x(t)\, dg(t)$	$\int_0^1 \|dg(t)\|$	$\widehat{BV}[0,\ 1]$

表中第一列表示空间, 它们的对偶空间是要求的. 第二列的表示式表示对偶空间每个元所取的形式; x 是空间的一个元. 第三列给出有界线性泛函的范数. 最后一列表示"等同"空间. 例如 $c^* \sim l_1$, 所以 c 的对偶空间是由 l_1 给出的.

我们已经证明关于 c 的结果. 用同样的方法可以证明关于 $c_0,\ l_p$ 的结果. 关于 l_p^*, p 和 q 之间有关系式 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 这里要

注意 l_p $(0<p<1)$ 是 p-赋范空间而不是赋范空间，关于在 p-赋范空间中算子范数的定义请看习题2的第3题. 对空间 $C[0, 1]$ 要在证明 Hahn-Banach 扩张定理(下面§5)以后才详细讨论. $\widehat{BV}[0, 1]$ 表示在 $[0, 1]$ 上有界变差函数空间的某个子空间.

如果我们证明有关 l_∞ 的论述，那就离题太远. 实际上它的对偶 $\mathscr{M}$ 是定义在正整数集 N 的子集上的有界有限可加集函数(或测度) μ 的空间. 注意，序列空间 l_∞ 的对偶不是序列空间，尽管在空间对偶表上其他序列空间的对偶都是序列空间. 这是因为 l_∞ 没有基底(它是不可分的)，而另外空间却有基底.

我们用一些有点几何味道的某些结果来结束这一节. 首先我们定义

通过原点的超平面　设 X 是线性空间. 通过 θ 的超平面 H 定义为 X 的极大真子空间，即 $H \neq X$ 并且如果对任意 X 的子空间 M 有 $H \subset M \subset X$，那么 $M = H$ 或 $M = X$.

超平面　超平面是形如 $x_0 + H$ 的集，这里 H 是通过 θ 的超平面.

不恒等于零的线性泛函的核是通过 θ 的超平面.

定理 9　(i) 如果 $f \in X^\dagger$, $f \neq 0$，那么 $\mathrm{Ker}(f)$ 是一超平面.

(ii) 如果 $f \in X^*$, $f \neq 0$，那么 $\mathrm{Ker}(f)$ 是闭超平面.

证明　由定理6知，当 $f \in X^*$ 时 $\mathrm{Ker}(f)$ 是闭的. 因此，我们只要证明(i). 由 $f \neq 0$ 知 $\mathrm{Ker}(f) \neq X$ 且因为当 $x, y \in \mathrm{Ker}(f)$ 时 $f(\lambda x + \mu y) = 0$，所以 $\mathrm{Ker}(f)$ 是 X 的子空间. 假设 $\mathrm{Ker}(f) \subset M$ 是严格包含，这里 M 是 X 的子空间，我们要证 $M = X$. 由假设知，存在

$$x_0 \in M \sim \mathrm{Ker}(f)$$

使得 $f(x_0) \neq 0$. 取 $x \in X$ 并令

$$y = x - f(x) x_0 / f(x_0).$$

那么 $f(y)=0$，因此 $y\in\mathrm{Ker}(f)\subset M$. x 既然是 M 的元素的线性组合，它应在 M 中. 于是 $X\subset M$，故 $X=M$. 因而 $\mathrm{Ker}(f)$ 是超平面.

推论 如果 $f\in X^{\dagger}$, $f\neq 0$, 那么 $\{x\,|\,f(x)=\alpha\}$（α 是固定标量）是一超平面.

证明 设 $S=\{x\,|\,f(x)=\alpha\}$. 因 $f\neq 0$, 存在 x_1 使得 $f(x_1)\neq 0$. 令 $x_0=\alpha x_1/f(x_1)$，容易验证

$$S=x_0+\mathrm{Ker}(f).$$

因此 S 是一超平面.

例 6 设 $X=R^3$, $f(x)=x_1+x_2+x_3$, 这里 $x=(x_1, x_2, x_3)\in R^3$. 显然 f 是 R^3（这里看作三维 Euclid 空间）上的线性泛函，并且因为对所有 $x\in R^3$,

$$|f(x)|\leqslant\sqrt{3}\,\|x\|$$

（事实上，$\|f\|=\sqrt{3}$，这只要令 $x=(1, 1, 1)$ 就可看出），所以 f 是连续的. 由定理 9，$\mathrm{Ker}(f)$ 是 R^3 中的闭超平面，在初等几何中它就是通过原点的“平面” $x_1+x_2+x_3=0$.

在三维空间，我们经常要考虑从原点到平面（它是用线性泛函来定义的）的距离. 在一般赋范空间我们也可以考虑从原点到超平面的距离，并且发现事实上这个距离与确定超平面的有界线性泛函的范数有密切的联系.

定理 10 设在 X^* 中 $f\neq 0$, 并记

$$M=\{x\,|\,f(x)=1\}.$$

如果 d 是从原点到超平面 M 的距离，那么 $d=1/\|f\|$.

证明 由距离的定义有 $d=\inf\{\|x\|\,|\,f(x)=1\}$. 对每一 $x\in M$ 有 $\|x\|\cdot\|f\|\geqslant 1$, $\|x\|\geqslant 1/\|f\|$，所以 $d\geqslant 1/\|f\|$.

设 $k>1$ 是任意的. 由 $\|f\|$ 的定义，存在 $y\neq\theta$，使得

$$\frac{|f(y)|}{\|y\|}>\frac{\|f\|}{k}.$$

因此 $k/\|f\|>\|x\|$，这里 $x=y/f(y)$；$f(x)=1$. 从而 $k/\|f\|>d$，又因 k 是任意的，有 $1/\|f\|\geqslant d$. 结合两个不等式得 $d=1/\|f\|$.

习 题 2

1. 设 X, Y 是赋范空间且 $A\in L(X, Y)$，如果 A 只在某一点 $x_0\in X$ 连续，证明 $A\in B(X, Y)$.

2. 证明 $c_0^*\sim l_1$ 和 $l_p^*\sim l_q$, $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

3. 设 X 是 p-赋范空间和 Y 是赋范空间. 假设 $A: X\to Y$ 在 X 上是线性的. 证明 A 是连续的当且仅当存在一常数 M，使得对所有 $x\in X$,

$$\|A(x)\|\leqslant M\|x\|^{1/p}.$$

(因此对这样的连续线性算子 A 我们可以定义 $\|A\|=\sup\{\|A(x)\|\cdot\|x\|^{-1/p}|x\neq\theta\}$.)

4. 设 X 是赋范空间且 M 是一闭子空间. 证明映射 $x\to E_x$ 是从 X 到商空间 X/M 上的线性满射且其范数为 1.

5. 试在 l_∞ 上举出两个范数，两个半范数和两个线性泛函的例子.

6. 设 C^n 有"最大模范数"，$\|x\|=\max\{|x_k| \mid 1\leqslant k\leqslant n\}$, $n\geqslant 1$是固定的. 假设 $a=(a_i)$是 C^n 中给定的点. 证明

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k x_k$$

确定了$(C^n)^*$的一个元素. 并证明 C^n 中闭单位球的象是 C^1 中的闭圆盘.

7. 设 $f: R\to R$ 连续而且可加，即对任意 $x, y\in R$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明 f 必为 $f(x)=\lambda x$ 的形式，其中 λ 为 R 中某数.

8. 设 f, g 是 $X^\dagger$ 中的元. 证明 $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(g)$当且仅当存在 $\lambda\neq 0$ 使得在 X 上 $f(x)=\lambda g(x)$.

9. 设 X 是赋范空间，S 是极大闭子空间. 证明存在 $f\in X^*$ 使得 $\mathrm{Ker}(f)=S$. 提示: 取 $x_0\in X\sim S$，证明对任一 $x\in X$, $x=s+\lambda x_0$，这里 $s\in S$, λ 是某一标量. 那么我们得到一个映射 $x\to\lambda$，而这映射具有所要求的性质.

10. 设 X 是有限维赋范空间. 证明 $X^*=X^\dagger$. 下面的提示也许是有帮助的.

(i) 由 $x\in X$ 可推出 $x=\sum_1^n \lambda_k b_k$, 这里$\{b_1, \cdots, b_n\}$是一 Hamel 基.

(ii) 由 $f\in X^\dagger$ 可推出 $f(x)=\sum_1^n \lambda_k f(b_k)$, 所以

$$|f(x)|\leqslant M_n\left(\sum_1^n|\lambda_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(iii) 在紧致集 $K=\left\{\lambda\in C^n\middle|\sum_1^n|\lambda_k|^2=1\right\}$ 上 $T(\lambda)=\left\|\sum_1^n\lambda_k b_k\right\|$ 是关于 $\lambda=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$的连续函数. 因此 T 有一最小值 $m\geqslant 0$.

(iv) $m>0$, 否则对某一$\lambda\in K$, $\lambda_1 b_1+\cdots+\lambda_n b_n=\theta$.

(v) 由 K 上 $0<m<T(\lambda)$ 可推出

$$\left(\sum_1^n|\lambda_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant m^{-1}\|x\|.$$

根据(ii), 在 X 上$|f(x)|\leqslant m^{-1}M_n\|x\|$, 于是 $f\in X^*$.

§3 Banach-Steinhaus 定理

Banach-Steinhaus 定理(下面定理 12) 是赋范空间理论中的一个基本结果. 它在分析的几个部门有许多多样化的应用, 其中某些应用将在后面给出. 我们首先建立一个比定理 12 更一般的结果.

定理 11 设 X 是第二纲 p-赋范空间. 假设 F 是下半连续的半范数 q 的族, 它满足对每一 $x\in X$ 和所有 $q\in F$

$$q(x)\leqslant M(x)<\infty,$$

那么存在一与 x 和 q 无关的常数 M, 使得对所有的$x\in X$ 与所有的 $q\in F$, 有

$$q(x)\leqslant M\|x\|^{1/p}.$$

证明 在这个定理中我们用$\|x\|$表示 X 中的 p-范数. 所以 $\|x\|=0$ 仅当 $x=\theta$, $\|\lambda x\|=|\lambda|^p\|x\|$和$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$, 这里$p>0$. 现记 $d(x, y)=\|x-y\|$, 则(X, d)是一度量空间. 因此由第二章定理 25, 存在一闭球 $S[a, r]$和一常数 H, 使得在 $S[a, r]$上,

对所有 $q\in F$, $q(x)\leqslant H$.

取 $x\in X$ 使$\|x\|>0$,那么

$$q(sx)=q(sx+a-a)\leqslant q(sx+a)+q(a),$$

这里 $s=(r/\|x\|)^{1/p}$. 因为 $a\in S[a, r]$, 所以对所有 $q\in F$, $q(a)\leqslant H$. 而且因为$\|sx\|=r$, 所以 $sx+a\in S[a, r]$. 因而, 对所有 $q\in F$, $q(sx)=sq(x)\leqslant 2H$, 从而对于 q,

$$q(x)\leqslant 2H\|x\|^{1/p}r^{-1/p}. \tag{8}$$

(8)式也包括了 $x=\theta$ 的情况,这时两边为零. 记 $M=2Hr^{-1/p}$, 就得所要证的结果.

推论 设 X 如上面定理所述,且假设(q_n)是一连续半范数序列使得在 X 上 $\lim_n q_n(x)$存在,记为 $q(x)$, 即

$$\lim_n q_n(x)=q(x). \tag{9}$$

那么, q 是 X 上的连续半范数.

证明 显然 q 在 X 上是半范数. 例如,于 $q_n(x+y)\leqslant q_n(x)+q_n(y)$中令 $n\to\infty$,可得 $q(x+y)\leqslant q(x)+q(y)$. 由(9), 从$(q_n(x))$的收敛性可推出它的有界性, 所以根据定理 11, 对所有的 n 与 $x\in X$,有 $q_n(x)\leqslant M\|x\|^{1/p}$. 因此 $q(x)\leqslant M\|x\|^{1/p}$,于是 q 在 X 上连续.

下面也是定理 11 的推论, 它就是所谓 Banach-Steinhaus 定理.

定理 12(Banach-Steinhaus) 如果 (A_n)是由 Banach 空间 X 到赋范空间 Y 中的有界线性算子序列,并且在 X 上

$$\limsup_n\|A_n(x)\|<\infty, \tag{10}$$

那么$\sup_n\|A_n\|<\infty$,即范数的序列$(\|A_n\|)$是有界的.

证明 Banach 空间是完备赋范空间, 所以是第二纲 1-赋范空间. 对每一 n, 因为 $A_n\in B(X, Y)$, 所以 $q_n(x)=\|A_n(x)\|$定义一个连续半范数 q_n. 因此由(10), 我们可以应用定理 11 得到对

所有的 n 与 $x\in X$, $q_n(x)\leqslant M\|x\|$. 这就推出对所有的 n, $\|A_n\|\leqslant M$. 证毕.

推论 如果用在 X 上

$$\lim_n A_n(x)=A(x)$$

存在来代替定理 12 的(10), 那么 A 是由 X 到 Y 中的有界线性算子.

证明 证明方法与定理 11 推论类似, 从略.

我们注意, 定理 12 和它的推论经常应用在 $Y=C$ 或 R 的特殊情形, 所以 $\|A_n(x)\|$ 可由 $|A_n(x)|$ 来代替.

下面我们给出上面推论的一个简单应用.

例 7 如果对每一 $x\in l_1$, 级数 $\sum a_k x_k$ 收敛, 那么 $a\in l_\infty$.

为了证明这一点我们定义

$$f_n(x)=\sum_1^n a_k x_k,$$

显然对每一 n 上式是 l_1 上有界线性泛函. 由假设, 对每一 $x\in l_1$, $\lim_n f_n(x)=\sum a_k x_k$ 存在, 比如说为 $f(x)$, 即

$$\lim_n f_n(x)=\sum a_k x_k=f(x).$$

再根据推论, $|f(x)|\leqslant M\|x\|=M\sum|x_k|$. 现令 $x_n=\operatorname{sgn} a_n$; $x_k=0$, 当 $k\neq n$. 于是 $f(x)=|a_n|\leqslant M$, $n=1, 2, \cdots$, 即 $a\in l_\infty$.

下面给出一个完全初等的证明方法: 假设 $a\notin l_\infty$, 那么可以找到序列 $n_1<n_2<\cdots$ 使得 $|a_{n_k}|>k^2$, $k=1, 2, \cdots$. 令 $x_{n_k}=1/a_{n_k}$, 而其他的 $x_n=0$. 那么, 因为 $\|x\|<\pi^2/6$, 所以 $x\in l_1$, 但 $\sum a_k x_k=1+1+\cdots$ 发散于 ∞. 这个矛盾说明必有 $a\in l_\infty$.

现在给出 Banach-Steinhaus 定理的应用的一个有趣的例子. 我们假定读者知道一些 Fourier 级数的基本概念. 需要知道的很少——必要的话读者可参看 K. Knopp 著的 Theory and Application of Infinite Series (无穷级数的理论和应用) (Blackie, 1964).

例 8 存在一个以 2π 为周期的连续函数，其 Fourier 级数在 0 点发散.

设 f 是以 2π 为周期的连续函数，所有这样的函数组成 Banach 空间 X，具有范数 $\|f\|=\max\{|f(t)|\,|\,t\in[0,2\pi]\}$. 由定义，$f$ 的 Fourier 系数是

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos kt\,dt,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt\,dt$$

$$(k=0,\ 1,\ \cdots).$$

f 的 Fourier 级数是形式级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{11}$$

这是形式的，因为级数可能根本不收敛，假如它收敛也可能不收敛于 f.

当计算(11)在 $x=0$ 点的第 n 个部分和时(见 Knopp 359 页)发现它就是

$$s_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}D_n(t)f(t)dt, \tag{12}$$

其中
$$D_n(t)=\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\Big/\sin\frac{1}{2}t.$$

函数 $D_n(t)$ 称为 Dirichlet 核，是以德国大数学家 P. G. Lejeune-Dirichlet(1805—1859)命名的，他于 1829 年，首先对 Fourier 级数理论进行严格的研究.

现在对每一 n，(12)在 X 上定义一个连续线性泛函 s_n. 因为 s_n 显然是线性的，而且容易证明 $|D_n(t)|\leqslant 2n+1$. 另外，

$$|s_n(f)|\leqslant\frac{\|f\|}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(t)|dt.$$

把右端记为 $\|f\|l_n$，因此 $\|s_n\|\leqslant l_n$. 我们将接着证明 $\|s_n\|=l_n$. 如果证明了这一点，就可以进行下面的论证. 假设对所有 $f\in X$，$(s_n(f))$ 收敛，那么由 Banach-Steinhaus 定理，我们有

$$\sup_n\|s_n\| = \sup_n l_n < \infty.$$

但当 $n\to\infty$ 时，$l_n\to\infty$（我们将要证明）. 这个矛盾说明 $(s_n(f))$ 不可能对所有 $f\in X$ 都收敛. 因此存在一个 f 使得 $(s_n(f))$ 发散，这就是我们的结果.

我们不希望用过多的分析细节（虽然它是必要的）来冲淡应用的主要内容，因而我们只指出论证的思想，至于详细的证明留作习题.

假如在(12)中令 $f_0=\operatorname{sgn} D_n$，那么，我们得到 $s_n(f_0)=l_n$. 但 f_0 有有限个不连续点，所以我们用一个在不连续点处是"光滑"的函数 f 来代替 f_0. 这样得到一个 $f\in X$ 使得 $\|f\|=1$，且对任意 $\varepsilon>0$，$s_n(f)>l_n-\varepsilon$. 因为我们已知 $\|s_n\|\leqslant l_n$，所以 $\|s_n\|=l_n$.

最后，我们证明当 $n\to\infty$ 时 $l_n\to\infty$. 对每一 n 记

$$c_k=(4k+1)\pi/4n+2,\quad d_k=(4k+3)\pi/4n+2.$$

那么，对 $t\in[c_k,d_k]$，有 $|D_n(t)|\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{t}$. 利用此式得到，当 $n\to\infty$ 时，

$$l_n>\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{2n}\int_{c_k}^{d_k}\frac{dt}{t}>\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{4k+3}\to\infty.$$

第七章将给出 Banach-Steinhaus 定理在矩阵变换上的应用.

习 题 3

1. 设 X 是 Banach 空间，q 是 X 上下半连续的半范数. 证明 q 在 X 上连续.

2. 如果对每一个 $x\in l_p$ $(1<p<\infty)$，级数 $\sum a_k x_k$ 收敛，证明 $a\in l_q(1/p+1/q=1)$.

3. 如果当 $x\in c$ 时，$\sum a_k x_k$ 收敛，证明 $a\in l_1$.

4. 如果当 $\sum x_k$ 收敛时，$\sum a_k x_k$ 收敛，证明 $a\in BV$.

5. 如果当 $\sum x_k$ 收敛时，$\sum|a_k x_k|<\infty$，证明 $a\in l_1$.

6. 设 $f_n\in X^\dagger$ 且对所有的 n 和 x，$|f_n(x)|\leqslant M\|x\|$. 并设

$$S=\{x \mid \lim_n f(x)\text{存在}\}.$$

证明 S 是 X 的闭子空间.

7. 证明§3例8未证的断言.

§4 开映射和闭图定理

如果映射 $A: X\to Y$ 是双射,那么存在 $A^{-1}: Y\to X$ 且 A^{-1} 是双射. 另外,如果 X 和 Y 是线性空间且 A 是线性的,那么,容易看到 A^{-1} 也是线性的. 现在假设 X, Y 是 Banach 空间且 A 有界(即连续). 那么,我们有著名的 Banach 定理,它告诉我们 A^{-1} 也有界. 我们将从"开映射定理"推出这个定理,开映射定理断言:在两个 Banach 空间之间的有界线性满射必是开映射. 然后,作为 Banach 定理的推论,建立重要的"闭图定理".

定理 13(开映射定理) 设 X, Y 是 Banach 空间且 $A\in B(X, Y)$是满射,那么 A 是开映射.

证明 设 G 在 X 中是开的, 并设 $y\in A(G)$, 那么, 对某 $x\in G$, $y=A(x)$. 现存在 $S(x,\delta)\subset G$,因此 $A(S(x, \delta))\subset A(G)$. 假定我们能够证明存在一个球 $S(y)\subset A(S(x, \delta))$, 那么就有 $S(y)\subset A(G)$, 所以 $A(G)$将是开的. 为了保证假定成立, 只需证明存在球 $S(\theta)\subset A(S_0)$,这里 S_0 是 X 中的单位球,$S(\theta)$是 Y 上以原点为心的球. 因为证明了这个事实,$A(S(x, \delta)-x)$将包含以原点为心的球,因此 $A(S(x, \delta))$将包含以 y 为心的球.

现在我们开始证明存在 $S(\theta)\subset A(S_0)$. 设

$$S_k=S(\theta, 2^{-k})=\{x \mid \|x\|<2^{-k}\} \quad (k=0, 1, \cdots).$$

如果 $x\in X$,我们可以记 $x=k(x/k)$, 这里 $k=[2\|x\|]+1$; 方括号表示 $2\|x\|$的整数部分. 于是 $x/k\in S_1$,所以 $x\in kS_1$. 因此

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty} kS_1.$$

因为 A 是满射,$A(X)=Y$,我们得到

$$Y=\bigcup_{k=1}^{\infty}kA(S_1).$$

但 Y 是完备的，所以是第二纲的，于是存在 k 使得 $kA(S_1)$不是疏朗集．因此$\overline{A(S_1)}$包含某个球，比如说是 $S(a, r)$． 我们现在要证明

$$S(\theta, r)\subset\overline{A(S_0)}. \tag{13}$$

我们有

$$S(\theta, r)\subset\overline{A(S_1)}-a\subset\overline{A(S_1)}-\overline{A(S_1)}\subset 2\overline{A(S_1)}=\overline{A(S_0)},$$

这就证明了(13)． 在上面的一连串包含式中，我们用到以下一些事实：$a\in\overline{A(S_1)}$，$\overline{A(S_1)}$是凸的以及当$y\in\overline{A(S_1)}$时，$-y\in\overline{A(S_1)}$．

由(13)，立即可得

$$S(\theta, r2^{-n})\subset\overline{A(S_n)}. \tag{14}$$

最后，我们证明 $S(\theta, r/2)\subset A(S_0)$． 取 $y\in S(\theta, r/2)$，那么，由(14)，$y\in\overline{A(S_1)}$．因此，对某 $y_1\in A(S_1)$，$\|y-y_1\|<r/4$．而且，$y-y_1\in S(\theta, r/4)\subset\overline{A(S_2)}$，所以，对某 $y_2\in A(S_2)$，$\|y-y_1-y_2\|<r/8$，如此继续下去，我们得到

$$\left\|y-\sum_{k=1}^{n}y_k\right\|<r/2^{n+1}, \tag{15}$$

这里 $y_k\in A(S_k)$．因此，对某个 $x_k\in S_k$，$y_k=A(x_k)$．由(15)，我们得到

$$y=\sum A(x_k),$$

因为$\|x_k\|<2^{-k}$，$\sum\|x_k\|<1$，我们看到 $\sum x_k$ 收敛，比如说收敛于 x，即 $\sum x_k=x$．而且，$\|x\|\leqslant\sum\|x_k\|<1$，$x\in S_0$，由 A 的连续性，

$$Ax=\sum A(x_k)=y.$$

于是，由 $y\in S(\theta, r/2)$推得对某 $x\in S_0$，$y=Ax$，即 $y\in A(S_0)$，这就证明了 $S(\theta, r/2)\subset A(S_0)$．根据我们前面说的这个包含关系能使我们推出开映射定理．

定理 14(Banach 定理) 设 X, Y 是 Banach 空间，如果 $A\in B(X, Y)$是双射，那么 $A^{-1}\in B(Y, X)$.

证明 这个结果可由定理 13 直接得到，因为 A 是双射、连续而且是开的，于是推得 A 是双方连续的. 因而 A 是线性同胚.

我们的下一个定理是很有用的，虽然对某些特殊问题用它还是用 Banach-Steinhaus 定理常常是个人的爱好.

在给出定理之前我们回忆映射 $A: X\to Y$ 的图是$\{(x, Ax)\mid x\in X\}$，它是 $X\times Y$ 的子集. 如果 X, Y 是赋范空间，我们可以使 $X\times Y$ 成为赋范空间，只要令

$$\|(x, y)\|=(\|x\|^2+\|y\|^2)^{\frac{1}{2}},$$

并定义$(x, y)+(x', y')=(x+x', y+y')$，$\lambda(x, y)=(\lambda x, \lambda y)$. 显然，$(x_n, y_n)\to(x, y)$当且仅当 $x_n\to x$ 和 $y_n\to y$. 因此，如果 X, Y 是 Banach 空间，那么 $X\times Y$ 也是 Banach 空间.

当 A 连续时，容易证明 A 的图是 $X\times Y$ 的闭子集. 加上附加条件，我们有更完全的结果.

定理 15 (闭图定理) 设 X, Y 是 Banach 空间，且 $A\in L(X, Y)$，那么 A 连续当且仅当它的图是闭的.

证明 (i) 设 A 连续，$G(A)$是 A 的图. 我们证明 $G(A)$是闭的——实际上在定理的这一部分中，A 的线性性质是多余的. 设$(x, y)\in\overline{G(A)}$，那么存在 $x_n\in X$ 使得 $x_n\to x$ 和 $Ax_n\to y$. 但 $Ax_n\to Ax$，所以 $y=Ax$，于是 $(x, y)=(x, Ax)\in G(A)$.

(ii) 假设 $G(A)$是闭的. 那么，$G(A)$是 Banach 空间 $X\times Y$ 的闭子空间，所以是 Banach 空间. 现在考虑由

$$f((x, Ax))=x$$

给出的映射 $f:G(A)\to X$. 这个映射显然是一个线性双射. 而且因为$\|f((x, Ax))\|=\|x\|\leqslant\|(x, Ax)\|$，所以 f 连续. 因此我们可

以应用 Banach 定理(定理 14)推出 $f^{-1}: X \to G(A)$连续. 最后

$$\|Ax\| \leqslant \|(x, Ax)\| = \|f^{-1}(x)\| \leqslant \|f^{-1}\| \|x\|,$$

所以 A 有界因而连续.

下面我们给出闭图定理的一个简单应用.

例 9 假设给出复数 a_{nk} 的无穷矩阵(a_{nk}), $n, k=1, 2, \cdots$. 设对每一 n 和每一 $x \in l_\infty$, $y_n = \sum_k a_{nk} x_k$ 收敛, 并设对每一 $x \in l_\infty$, $y=(y_n) \in l_\infty$, 那么, 由 $y=Ax$ 确定的算子 A 是 $B(l_\infty, l_\infty)$的一个元.

首先, 对每一 n 和每一 $x \in l_\infty$, 由 $\sum a_{nk} x_k$ 收敛可推出对每一 n, $\sum |a_{nk}| < \infty$——只须对每一 n 取 $x_k = \operatorname{sgn} a_{nk}$, $k=1, 2, \cdots$. 因而 $A_n(x) = \sum a_{nk} x_k$ 确定一元 $A_n \in l_\infty^*$①. 显然算子 A 是线性的. 所以需要证明它的连续性. 由闭图定理, 只要证明 $G(A)$是闭的. 任意取 $(x, y) \in \overline{G(A)}$, 那么存在 $x^{(i)} \in l_\infty$ 使得当 $i \to \infty$ 时 $x^{(i)} \to x$, $Ax^{(i)} \to y$. 对每一 n, 由 A_n 的连续性推得当 $i \to \infty$ 时, $A_n(x^{(i)}) \to A_n(x)$. 另外, $Ax^{(i)} \to y$ 显然蕴涵对每一 n, 当 $i \to \infty$ 时, $A_n(x^{(i)}) \to y_n$. 因此 $y_n = A_n(x)$, $y = Ax$, 所以$(x, y) \in G(A)$, 这证明了$\overline{G(A)} \subset G(A)$, 即 $G(A)$是闭的.

习 题 4

1. 设$(X, \|\cdot\|)$, $(X, \|\cdot\|')$是 Banach 空间, 他们满足: 对所有 $x \in X$ 和某常数 K, $\|x\| \leqslant K\|x\|'$. 证明存在常数 M 使得对所有 $x \in X$, $\|x\|' \leqslant M\|x\|$, 由此说明这两个范数在 X 上生成相同的度量拓扑.

2. 设 $A_1 \in B(X_1, X_3)$, $A_2 \in B(X_2, X_3)$, 此处 X_1, X_2, X_3 是 Banach 空间. 如果对任一 x 方程 $A_1(x) = A_2(y)$有唯一解 $y = A(x)$, 证明 A 是 X_1 到 X_2 中的有界线性算子(用闭图定理).

3. X, Y 是 Banach 空间, 算子 $A_0 \in B(X, Y)$是双射. 如果算子 $A_1 \in B(X, Y)$满足$\|A_0^{-1}\| \|A_1\| < 1$, 证明算子 $A_0 + A_1$ 有一个逆(用第二章的定理 13).

---

① 这也是第四章 §3 定理 12 推论的结果.

§5 Hahn-Banach 扩张定理[①]

下面简要地证明线性空间理论的一个基本定理. 这个定理的重要性在于保证线性扩张的存在, 把定义在子空间上的线性泛函扩张到整个空间. 定理的证明部分地依靠 Zorn 引理或某个等价的公理. 首先我们对实线性空间证明定理——推广到复线性空间是相当简单的.

定理 16(Hahn-Banach) 设 X 是实线性空间, M 是一子空间. 假设 p 在 X 上是次可加的, 且当 $\alpha \geqslant 0$ 及 $x \in X$ 时, $p(\alpha x) = \alpha p(x)$. 如果 f 是 M 上的线性泛函, 且在 M 上

$$f(x) \leqslant p(x),$$

那么, 存在 f 到 X 的线性扩张 g, 使得在 X 上,

$$g(x) \leqslant p(x).$$

证明 假设 $M \neq X$, 否则就不需要证明. 取 $z \in \sim M$ 和 x, $y \in M$. 那么, $f(x)-f(y) \leqslant p(x-y) \leqslant p(x+z)+p(-y-z)$. 所以 $-p(-y-z)-f(y) \leqslant p(x+z)-f(x)$. 因此对每一 $x \in M$,

$$s = \sup_{y \in M}\{-p(-y-z)-f(y)\} \leqslant p(x+z)-f(x),$$

于是,

$$s \leqslant \inf_{x \in M}\{p(x+z)-f(x)\}.$$

因而, 存在一个数 t, 使得对所有 $y \in M$,

$$-p(-y-z)-f(y) \leqslant t \leqslant p(y+z)-f(y). \tag{16}$$

现定义子空间 $M_z = \{x+\alpha z \mid x \in M, \alpha \text{ 实数}\}$, 那么, 如果 $w \in M_z$, 我们有 $w = x+\alpha z$, 这个表示式的唯一性是容易验证的. 在 M_z 上定义函数 h:

$$h(w) = f(x)+\alpha t.$$

那么, h 显然在 M_z 上是线性的, 所以是 f 从 M 到 M_z 的线性扩

① 由 Banach 和著名德国数学家 H. Hahn(1879—1934)独立地证明.

张. 现在我们证明: 在 M_z 上

$$h(w)\leqslant p(w).$$

这从(16)直接得到, 只要令 $y=x/\alpha$, $\alpha\neq 0$ 且区分情况 $\alpha>0$ 与 $\alpha<0$.

如果正好 $M_z=X$, 那么我们就完成了证明; 不然的话, 我们可以再进行扩张. 但是什么能保证我们总可以把它扩张到全空间 X 呢? 这就需要用 Zorn 引理或它的等价形式. 我们用 Zorn 引理(见第一章). 设 P 是所有有序对 (M', h') 的集合, 这里 M' 是包含 M 的一个子空间, h' 是 f 到 M' 的一个扩张, 使得在 M' 上 $h'\leqslant p$. P 的半序定义为

$$(M', h')\preccurlyeq(M'', h'').$$

当且仅当 $M'\subset M''$, 且在 M' 上, $h'=h''$.

设 $S=\{(M_\alpha, h_\alpha)\}$ 是 P 的一个全序子集. 那么, 容易证明 S 有一个上界 $(\cup_\alpha M_\alpha, H)$, 其中

$$H(x)=h_\alpha(x) \quad 对\ x\in M_\alpha.$$

这里要指出, $\cup M_\alpha$ 是子空间是由于 S 的全序性.

由 Zorn 引理, P 有一极大元, 比如说 $(\mathscr{M}, \mathscr{H})$. 我们现在要完成定理的证明只需要证明 $\mathscr{M}=X$. 假设 $\mathscr{M}\neq X$. 那么, 由我们证明的第一部分, 我们可以这样扩张, 使得 $(\mathscr{M}_z, \mathscr{H}_z)\succcurlyeq(\mathscr{M}, \mathscr{H})$. 因为 $(\mathscr{M}, \mathscr{H})$ 是极大元, 所以一定有 $\mathscr{M}_z=\mathscr{M}$, 这与 $\mathscr{M}_z\supset\mathscr{M}$ 严格成立矛盾. 因此假设 $\mathscr{M}\neq X$ 是错误的, 于是记 $g=\mathscr{H}$, 证明就完成了.

推论 1 定义在实赋范线性空间 X 的子空间上的任一有界线性泛函可以线性地扩张到整个 X 上而保持范数不变.

证明 比如说在 M 上, 我们有 $|f(x)|\leqslant\|f\|\|x\|$. 因此, 存在 g 使得在 X 上 $g(x)\leqslant\|f\|\|x\|$. 用 $-x$ 代替 x, 我们推得 $|g(x)|\leqslant\|f\|\|x\|$. 另外, 对 $x\in M$, 我们有 $g(x)=f(x)$, 所以 $\|g\|=\|f\|$.

推论 2 如果 $X \neq \{\theta\}$ 是实赋范空间，那么，在 X 上必存在非平凡的连续线性泛函.

证明 在 Hahn-Banach 定理中取 $p(x)=\|x\|$. 现任意取 $x_0 \neq \theta$ 且规定 $M=\{\alpha x_0 | \alpha$ 是实数$\}$. 于是 M 是一子空间. 假如我们设 $f(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\|$, 那么 f 在 M 上是线性连续的. 因此, 我们可以保持范数不变把 f 扩张到整个 X 上(推论 1). 因而 X 的每一非零元 x_0 生成一个在 X 上的连续线性泛函, 它在 x_0 的值为 $\|x_0\|>0$.

推论 3 设 X 是实赋范线性空间, 并假设对所有 $f \in X^*$, $f(x)=0$. 那么, 必有 $x=\theta$.

证明 假如 $x \neq \theta$, 由推论 2, 存在 $f \in X^*$ 使得 $f(x)>0$, 而我们假设对所有 $f \in X^*$, $f(x)=0$. 从而得证.

现在我们给出 Hahn-Banach 定理的复的形式.

定理 17 设 X 是复线性空间, M 是一子空间, 且 p 是 X 上的半范数. 假设 f 是 M 上一复值线性泛函, 并且在子空间 M 上满足 $|f(x)| \leqslant p(x)$. 那么, 存在 f 到 X 的线性扩张 g, 使得在 X 上 $|g(x)| \leqslant p(x)$.

证明 记 $f=f_1+if_2$, 所以 f_1, f_2 是 M 上实线性泛函, 这里把 M 看作实线性空间. 另外, 在 M 上 $f_1(ix)=-f_2(x)$, $f_1(x) \leqslant |f(x)| \leqslant p(x)$, 所以, 用实的 Hahn-Banach 定理, 把 f_1 扩张成 g_1, 且使在 X 上 $g_1(x) \leqslant p(x)$. 现令 $g(x)=g_1(x)-ig_1(ix)$, 所以在 M 上 $g(x)=f(x)$. 而且, $g(ix)=ig(x)$, 因为 g_1 是实线性的, 于是在 X 上 g 是复线性的.

最后, 假如 $g(x)=0$, 那么 $|g(x)| \leqslant p(x)$——因为 p 是非负的. 假如 $g(x) \neq 0$, 令 $\alpha=\arg g(x)$, 则

$$|g(x)|=g(x)e^{-i\alpha}=g(xe^{-i\alpha})=g_1(xe^{-i\alpha}) \leqslant p(xe^{-i\alpha})=p(x),$$

因为 $g(xe^{-i\alpha})$ 是实的且 p 绝对齐次.

现在很清楚，定理 16 各个推论的复的形式也成立.

作为 Hahn-Banach 定理的一个应用，我们对 $C^*[0, 1]$ 的元素证明 Riesz① 表示定理.

定理 18(Riesz 表示定理)　如果 $f\in C^*[0, 1]$，那么，在 $[0,1]$ 上存在有界变差函数 g 使得

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\,dg(t) \quad \text{对所有 } x\in C[0, 1],$$

$$\|f\|=V(g)=g \quad \text{在}[0, 1]\text{上的全变差}.$$

证明　证明之前注意，我们假定已经知道 Riemann-Stieltjes 积分 $\int_0^1 x(t)dg(t)$ 的某些基本性质. 有关这方面的内容可参考 Rudin(1964) 的著作. 我们主要需知道：如果 $x\in C[0, 1]$，$g\in BV[0, 1]$，那么 $\int_0^1 x(t)dg(t)$ 存在，且

$$\lim_{\mu(P)\to 0}\sum_{i=1}^n x(c_i)\,(g(t_i)-g(t_{i-1}))=\int_0^1 x(t)dg(t),$$

这里 $P=\{0=t_0, t_1, \cdots, t_n=1\}$，$t_0<t_1<\cdots<t_n$，是 $[0, 1]$ 的一个划分；$\mu(P)=\max(t_i-t_{i-1})$，$1\leqslant i\leqslant n$，$c_i\in[t_{i-1}, t_i]$. 而且要这样理解：对任意划分 P 和 c_i 的任意选择极限是存在的.

现把 $C[0, 1]$ 看作 $[0, 1]$ 上的有界函数的 Banach 空间 M 的子空间，空间 M 的范数是 $\|x\|=\sup\{|x(t)|\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\}$，$x\in M$. 假如 $f\in C^*[0, 1]$，那么，由 Hahn-Banach 定理，存在一个到 M 的线性扩张 F，使得在 $C[0, 1]$ 上 $f(x)=F(x)$ 且 $\|F\|=\|f\|$.

设 χ_t 表示 $[0, t]$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 上的特征函数，即 $\chi_t(y)=1$ $(0\leqslant y\leqslant t)$，$\chi_t(y)=0$ $(t<y\leqslant 1)$. 那么，对每一 $t\in[0, 1]$，$\chi_t\in M$，我们记 $F(\chi_t)=g(t)$. 这个函数 g 就是定理中的函数. 现记 $\varepsilon_i=\mathrm{sgn}[g(t_i)-g(t_{i-1})]$. 那么，$|g(t_i)-g(t_{i-1})|=[g(t_i)-g(t_{i-1})]\varepsilon_i$，所以

① F. Riesz(1880—1956)，著名匈牙利数学家，泛函分析创始人之一.

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i)-g(t_{i-1})|\leqslant\|F\|\cdot\left\|\sum_{i=1}^{n}[\chi_{t_i}-\chi_{t_{i-1}}]\varepsilon_i\right\|.$$

如果 $y\in(0, 1]$，则对某个 j, $y\in(t_{j-1}, t_j]$，因此

$$\sum_{i=1}^{n}[\chi_{t_i}(y)-\chi_{t_{i-1}}(y)]\varepsilon_i=\varepsilon_j.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i)-g(t_{i-1})|\leqslant\|F\|,\tag{17}$$

因此 $g\in BV[0, 1]$.

现定义 $$z_n(0)=x(0),$$

而对 $0<u\leqslant 1$，定义

$$z_n=\sum_{r=1}^{n}x(r/n)(\chi_{r/n}-\chi_{(r-1)/n}).$$

那么，如果 $u\in(0, 1]$，我们有：对某个 r, $u\in((r-1)/n, r/n]$，所以

$$z_n(u)=x(r/n).$$

因为 x 连续，因而在 $[0, 1]$ 上一致连续，由此得到 $\|x-z_n\|\to 0$ $(n\to\infty)$. 从而 $F(z_n)\to F(x)=f(x)$，所以

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}x(r/n)\left(g(r/n)-g\left(\frac{r-1}{n}\right)\right)\\&=\int_0^1 x(t)\,dg(t).\end{aligned}\tag{18}$$

由(18)，我们得到

$$|f(x)|\leqslant\max|x(t)|\cdot V(g)=\|x\|V(g),$$

所以 $\|f\|\leqslant V(g)$，结合(17)，得到 $\|f\|=V(g)$.

在定理 18 中，函数 $g\in BV$ 不是唯一的. 例如，我们可以加任一常数到 g 上，对 f 仍得到同一个表示式. 因此，我们不能认为 $C^*[0, 1]$ 与 $BV[0, 1]$ 是等同的.

为得到 $C^*[0, 1]$ 的等同空间，我们需要用到函数 g 在 $BV[0,1]$ 上的两个著名的性质. 第一个是对每一 $t\in[0,1]$, $g(t+0)=$

$\lim\limits_{x\to t+} g(x)$存在，第二个是 g 的不连续集至多是可列的. 现记

$\widehat{BV}[0, 1]=\{G\in BV \mid G(0)=0$ 且 $G(t+0)=G(t), 0<t<1\}$.

那么，$\widehat{BV}$ 是 BV 的子空间. 定义函数 G: $G(0)=0$, $G(1)=g(1)-g(0)$和 $G(t)=g(t+0)-g(0), 0<t<1$. 那么，在 $t=0$, $t=1$ 以及每一使 g 连续的 $t\in(0, 1)$,

$$G(t)=g(t)-g(0).$$

因此，对任一 $x\in C[0, 1]$，我们有

$$\int_0^1 x(t)dg(t)=\int_0^1 x(t)dG(t).$$

显然 $G\in\widehat{BV}$. 因此，每一 $f\in C^*[0, 1]$是和一个$G\in\widehat{BV}$相联系，使得对所有 $x\in C[0, 1]$,

$$f(x)=\int_0^1 x(t)dG(t).$$

函数 G 确实是唯一的. 因为假设 $h\in\widehat{BV}$, 使得对所有 $x\in C[0, 1]$, $f(x)=\int_0^1 xdh$. 令 $x\equiv 1$，因 $G(0)=h(0)=0$，所以得到 $G(1)=h(1)$. 现取 $0<c<1$，并记 $H(t)=G(t)-h(t)$. 则对所有 $x\in C[0, 1]$, $\int_0^1 xdH=0$. 选择 x 使得在 $[0, c]$ 上 x 等于1, 在 $[c+h, 1]$上 x 等于0，并用直线连接点$(c, 1)$, $(c+h, 0)$来完成定义. 那么，$x\in C[0, 1]$，用分部积分法，

$$\begin{aligned}0&=H(c)+\int_c^{c+h} x(t)dH(t)\\&=H(c)-H(c)-\int_c^{c+h} x'(t)H(t)dt\\&=\frac{1}{h}\int_c^{c+h} H(t)dt\to H(c+0)\quad 当\ h\to 0+.\end{aligned}$$

因此，对 $0<c<1$，我们有 $H(c+0)=0$，即 $G(c+0)=h(c+0)$，亦

即 $G(c)=h(c)$. 这样，我们证明了在[0, 1]上 $G=h$，所以 G 是唯一的. 现在要证明$\|f\|$等于在[0, 1]上 G 的全变差就成为一个简单问题，而这就完成了 $C^*[0, 1]$和 $\widehat{BV}[0, 1]$的等同化.

赋范空间的二次对偶 Hahn-Banach 定理的另一个应用是有关赋范空间 X 的第二对偶空间(或二次对偶). 二次对偶由 $X^{**}=(X^*)^*$ 来表示. 我们将证明 X 可以和 X^{**} 的某个子空间 $\widetilde{X}$ 等同. 于是，我们认为 X 是自然地嵌入它的二次对偶 X^{**} 里的.

定理19 设 X 是赋范线性空间，那么，X 与二次对偶空间 X^{**} 的一个子空间 $\widetilde{X}$ 等距同构.

证明 象通常一样,我们用 x 表示 X 的元素，用 x^* 表示 X^* 的元素. 对应于每一个 $x\in X$,用

$$\tilde{x}(x^*)=x^*(x)$$

定义 X^* 上一个线性泛函 $\tilde{x}$. 这样，对每一$x^*\in X^*$,我们把x^*在点 $x\in X$ 处的值和它(x^*)联系起来. 由于在 X^* 上定义线性运算的方式,可以推出 $\tilde{x}$ 在 X^* 上是线性的. $\tilde{x}$ 在 X^* 上也是连续的:

$$|\tilde{x}(x^*)|=|x^*(x)|\leqslant\|x^*\|\|x\|,$$

于是$\|\tilde{x}\|\leqslant\|x\|$. 因此，映射 $x\to\tilde{x}$ 定义一个 X 到 X^{**} 中的连续线性算子. 设 $\widetilde{X}$ 表示在映射 $x\to\tilde{x}$ 下 X 的象. 我们只需证明这个映射是等距的. 由 Hahn-Banach 定理的推论 2,存在 $y^*\in X^*$ 使得 $y^*(x)=\|x\|$ 且$\|y^*\|=1$. 因此

$$\|\tilde{x}\|=\sup_{x^*\neq\theta}\frac{|\tilde{x}(x^*)|}{\|x^*\|}\geqslant|\tilde{x}(y^*)|=\|x\|,$$

于是,由前面得到的结果$\|\tilde{x}\|\leqslant\|x\|$,我们有$\|\tilde{x}\|=\|x\|$. 定理证毕.

一般我们有 $\widetilde{X}\subset X^{**}$. 假如出现相等就得到自反空间.

解析的矢值函数 我们希望提到 Hahn-Banach 定理的另一个应用.它涉及复变量中著名的 Liouville 定理的推广,Liouville

定理断言：有界整函数必是常数.

首先，我们在复平面 C 的域 D 上定义解析矢值函数 $x=x(z)$. 设 X 是 Banach 空间且 $x: D\to X$ 是 D 到 X 中的映射. 那么, x 称为在 D 上是解析的当且仅当对每一 $z\in D$ 与 $z+h\in D$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{x(z+h)-x(z)}{h}$$

存在, 记为 $x'(z)$. 此极限是依 X 中范数取的.

如果 $f\in X^*$ 且 x 在 D 上解析, 那么, 容易看到, 由 $(fx)(z)=f(x(z))$ 定义的 fx 在通常复变量的意义下, 在 D 上解析.

按照通常的说法, 如果 x 在 C 上解析, 我们称 x 为整函数. 如果对所有 $z\in C$, $\|x(z)\|\leqslant M$, 我们定义它为有界的. 现在我们证明推广的 Liouville 定理.

定理 20 如果 $x:C\to X$, 此处 X 是 Banach 空间, 且 x 是有界整函数, 那么 x 是常数.

证明 对任意 $f\in X^*$, 我们有: 在 C 上 $|f(x(z))|\leqslant\|f\|\|x(z)\|\leqslant\|f\|M$, 所以 fx 有界. 因为 fx 也是在通常复变量意义下的整函数, 由通常的 Liouville 定理, 对任意 $z, z'\in C$, 有 $f(x(z))=f(x(z'))$, 所以, 对任意 $z, z'\in C$, $f(x(z)-x(z'))=0$. 根据Hahn-Banach 定理的推论 3 得到, 对任意 $z, z'\in C$, 有 $x(z)-x(z')=\theta$, $x(z)=x(z')$, 即 x 是常数.

习 题 5

1. M 是赋范空间 X 的子空间, 且 $y\in X$ 满足 $d(y, M)\geqslant d>0$. 用 Hahn-Banach 定理证明: 存在一个 $f\in X^*$ 使得 $\|f\|<1$, $f(y)=d$ 且对所有 $m\in M$, $f(m)=0$. 提示: 考虑由 M 和 y 生成的子空间.

2. (在 l_∞ 中的广义极限) 考虑实线性空间 l_∞. 对于 $x\in l_\infty$, 令 $p(x)=\inf(\limsup_n k^{-1}\Sigma\{x_{n+i_j}|1\leqslant j\leqslant k\})$, 这里 inf 是在正整数的一切有限集合 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 上取的. 证明 p 在 l_∞ 上是有意义的, $p(\alpha x)=\alpha p(x)$, $\alpha\geqslant 0$, $x\in l_\infty$

且 p 是次可加的. 由 Hahn-Banach 定理得到在 l_∞ 上的一个线性泛函 f, 具有下列性质: 当对所有 n, $x_n \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant 0$;

$$f((x_2, x_3, \cdots)) = f((x_1, x_2, \cdots));$$

如果对所有 n, $x_n = 1$, 那么 $f(x) = 1$. 因而, 记 $f(x) = \mathrm{Lim}\, x_n$, 我们看到, f 具有通常在 c 上 "lim" 的性质. 记号 Lim 指明是在 l_∞ 上而不是在 c 上取极限.

3. 设 X 是赋范空间, $x: D \to X$, 这里 D 是 C 中的域. 证明: 如果 x 在 D 上解析且 $f \in X^*$, 则 fx 在 D 上解析.

4. 设 L 是 C 中一简单闭曲线, X 是 Banach 空间. 如果 $x: L \to X$ 在 L 上连续, 证明 $\int_L x(z)dz$ 存在. 这个积分是象在复变量理论中那样来定义的, 只是极限是依范数取的. 证明用到 X 的完备性.

5. X 是 Banach 空间, L 是 C 中的简单闭曲线. 如果 x 在 L 内解析且在 L 上连续. 证明推广的 Cauchy 定理:

$$\int_L x(z)dz = \theta.$$

提示: 用通常的 Cauchy 定理①与 Hahn-Banach 定理.

§6 弱 收 敛

设 (x_n) 是赋范空间 X 中的序列. 那么, 称 (x_n) 弱收敛于 $x \in X$ (记作 $x_n \to x$ (弱)), 当且仅当

$$f(x_n) \to f(x) \quad \text{当 } n \to \infty, \text{对每一 } f \in X^*.$$

我们称 x 为 (x_n) 的弱极限.

如果依范数 $x_n \to x$, 即 $\|x_n - x\| \to 0$, 那么, 因为对每一 $f \in X^*$,

$$|f(x_n) - f(x)| \leqslant \|f\| \|x_n - x\|,$$

所以我们有 $x_n \to x$ (弱). 因而依范数收敛蕴涵弱收敛于同一极限, 由于这个原因, 依范数收敛常常被称为强收敛.

---

① 由于题中没有假设 x 在 L 上解析, 故须应用 Cauchy 定理的较强形式, 可参看普里瓦洛夫著, 闵嗣鹤等译《复变函数引论》, 人民教育出版社, 1978, 第四章 §3 第 8 小节——译者注.

定理 21 （i）弱收敛序列的弱极限是唯一的.

（ii）在一般情况下，弱收敛不等价于强收敛.

（iii）如果 $x_n \to x$（弱），那么 $\sup_n \|x_n\| < \infty$.

证明 （i）假设 $x_n \to x$（弱）且 $x_n \to y$（弱）. 那么，$f(x-y) = f(x-x_n) + f(x_n - y) \to 0$，因此，对每一 $f \in X^*$，$f(x-y)=0$. 由 Hahn-Banach 定理推论 3（第四章 § 5）得 $x=y$.

（ii）考虑空间 $l_p(1<p<\infty)$. 只要我们查一下本章 § 2 中的对偶空间表，就可以知道任一 $f \in l_p^*$ 能被写成 $f(x) = \sum a_k x_k$ 对所有 $x \in l_p$，这里 $a \in l_q$ 且 $1/p + 1/q = 1$. 假如我们记 $e_1 = (1, 0, 0, \cdots)$，$e_2 = (0, 1, 0, \cdots)$，$\cdots$，那么，依 l_p 的范数有 $\|e_n - e_m\| = 2^{1/p}$ $(n \neq m)$，因此，(e_n) 不是强收敛的. 然而，(e_n) 弱收敛于 θ. 因为，当 $f \in l_p^*$，我们有 $f(e_n) = a_n$，而由 $a \in l_q$ 推出 $a_n \to 0$.

在 $p=1$ 的情况，强收敛和弱收敛恰好一致. 这将作为关于矩阵变换的 Schur 定理的推论而加以证明（见第七章 § 1 定理 6）.

（iii）由 $x_n \to x$（弱）可推出：对任一 $f \in X^*$，$f(x_n - x) \to 0 (n \to \infty)$. 由 Hahn-Banach 定理推论 2，存在 $f_n \in X^*$ 使得 $f_n(x_n - x) = \|x_n - x\|$ 和 $\|f_n\| = 1$. 对每一 $f \in X^*$ 定义 $F_n(f) = f(x_n - x)$. 那么，(F_n) 是 Banach 空间 X^* 上的连续线性泛函的序列. 因为 $f(x_n - x) \to 0$，于是在 X^* 上，$\limsup_n |F_n(f)| < \infty$. 现在由 Banach-Steinhaus 定理（第四章 § 3 定理 12）得 $M = \sup_n \|F_n\| < \infty$. 因此

$$\|x_n - x\| = |f_n(x_n - x)| = |F_n(f_n)| \leqslant \|F_n\| \|f_n\| \leqslant M,$$

所以，对每一 n，$\|x_n\| \leqslant M + \|x\|$. 定理证毕.

在赋范线性空间 X 的对偶空间中，可以定义一类重要的收敛，即所谓 $f_n \to f$（弱*），它是指

(a) $f_n(x) \to f(x)$ 当 $n \to \infty$，对每一 $x \in X$，及

(b) $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

这种收敛称为在 X^* 上弱*(弱星号)收敛，如果 X 是 Banach 空间，那么(b)是多余的，因为由 Banach-Steinhaus 定理可以证明(a)蕴涵(b).

定理 22 设 X 是赋范空间，包含一个可列子集 $\{x_k\}$，它的线性包在 X 上是稠密的，那么

$$d(f_1, f_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_1(x_k)-f_2(x_k)}{2^k(\|x_k\|+1)}$$

是 X^* 上的度量，并且由 X^* 中弱*收敛可以推出依这个度量的收敛.

并且，如果 S 是单位球 $\{f\in X^* \mid \|f\|\leqslant 1\}$，那么，$S$ 在由 d 产生的度量拓扑中是紧致的.

证明 因为对 X^* 中任意 f_1, f_2，$d(f_1, f_2)\leqslant\|f_1-f_2\|<\infty$，所以 d 是有确定意义的. 如果 $d(f_1, f_2)=0$，那么，对 $n=1, 2, \cdots$，$(f_1-f_2)(x_n)=0$. 现在任意取 $x\in X$. 因 $\{x_k\}$ 的线性包在 X 中稠密，存在 $y_{n_k}\to x\,(k\to\infty)$，这里 y_{n_k} 是 $\{x_k\}$ 的元的线性组合. 因此，由 f_1-f_2 的连续性得 $(f_1-f_2)(x)=\lim_k(f_1-f_2)y_{n_k}=0$，所以 $f_1=f_2$. 关于度量空间的其他一些公理显然被满足，于是，d 是 X^* 上的度量.

现假设 $f_n\to f$ (弱*). 那么，对每一 $x\in X$，当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)\to f(x)$，并且 $M=\sup_n\|f_n\|<\infty$. 因此，对任何 N，

$$d(f_n, f)\leqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{|f_n(x_k)-f(x_k)|}{2^k(\|x_k\|+1)}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{M}{2^{k-1}}=\Sigma_1+\Sigma_2,$$

Σ_1, Σ_2 分别表示不等式右端的两个和式. 设给定 $\varepsilon>0$，选择 N 充分大使得 $\Sigma_2<\varepsilon/2$. 然后选择 n_0 充分大，使得当 $n>n_0$ 时，$\Sigma_1<\varepsilon/2$. 因而依度量 d，$f_n\to f$.

最后，只要证明单位球 S 是序列紧致的，即 S 中每一序列 (f_n) 有一弱*收敛子序列，其极限属于 S. 现在因为对所有 n，$|f_n(x_1)|\leqslant\|f_n\|\|x_1\|$，所以 $(f_n(x_1))$ 在 C 中有界. 因此存在一收

敛子序列$(f_{n1}(x_1))$．类似地，$(f_{n1}(x_2))$有一收敛子序列$(f_{n2}(x_2))$．如此继续下去，我们得到(f_n)的一个子序列(f_{nn})使得对每一k，$(f_{nn}(x_k))$在C中收敛．那么，对每一k，$(f_{nn}(x_k))$是Cauchy序列，且因为$\{x_k\}$的线性包在X中稠密，于是，对每一$x\in X$，$(f_{nn}(x))$是Cauchy序列．因而，对每一$x\in X$，$f_{nn}(x)$收敛，比如说收敛于$f(x)$，即$f_{nn}(x)\to f(x)$．显然，f是线性的，且对所有n，$\|f_{nn}\|\leqslant 1$蕴涵$|f(x)|=\lim_n|f_{nn}(x)|\leqslant\|x\|$．因此$\|f\|\leqslant 1$，所以$f\in S$．定理证毕．

注意，我们在定理22中已经证明的是：如果X是某一确定类型的赋范空间，那么存在X^*上的度量d，由此作出(X^*, d)，使得S成为(X^*, d)的紧致子集．弱星号收敛仅仅是用来证明这个结果的一种手段．如果用拓扑方式研究这个问题，就会得到更满意的结果．对任何赋范空间X，可以定义在X^*上一个拓扑T^*(称为弱星号拓扑)使得$S=\{f\in X^*|\,\|f\|\leqslant 1\}$是拓扑空间$(X^*, T^*)$的紧致子集．这个一般结果称为Alaoglu定理．因为该定理的证明需用到的拓扑知识比我们所掌握的还要多，所以它的细节请读者参考较高深的著作．

习 题 6

1．证明在赋范空间C^n中，弱收敛和强收敛是等价的．

2．假设集$E\subset X^*$使得(E)的线性包在X^*中是稠密的．设(x_n)是X中一序列，满足$\sup_n\|x_n\|<\infty$且对任一$f\in E$，$f(x_n)\to f(x)$．证明$x_n\to x$(弱)．

3．设$x^{(n)}=(x_k^{(n)})\in c$，$n=1, 2, \cdots$．证明在c中，$x^{(n)}\to x=(x_k)$(弱)当且仅当$\sup_n\|x^{(n)}\|<\infty$，$\lim_n x_k^{(n)}=x_k$，对每一k，且

$$\lim_n(\lim_k x_k^{(n)})=\lim_k x_k.$$

第五章　Banach 代数

§1　代数和 Banach 代数

本章介绍 Banach 代数理论的一些基本概念．我们论述的范围是很有限的，只打算作简单的介绍．首先给出一些定义．下面讲到的线性空间除非特别指明是实的外全是复的．

代数　一个代数 X 是一个线性空间，它的元素间有一个乘法运算，满足：

$$xy\in X,\ x(yz)=(xy)z,\ x(y+z)=xy+xz,\ (x+y)z=xz+yz,$$

并对标量 λ 有 $\lambda(xy)=(\lambda x)y=x(\lambda y)$．

在某些代数中，存在一个非零元素 e，对所有的 x 有 $ex=xe=x$．若这样的 e 存在，显然它是唯一的，并称为该代数的单位元(identity)．

如果一个代数对其所有的元素 x, y 具有性质 $xy=yx$，那么就称为可交换代数．

赋范代数　一个赋范代数是一个代数，它作为一个线性空间是赋范的，并且它的范数对所有的 x, y 满足 $\|xy\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$．

性质 $\|xy\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$ 称为范数的次乘法性质．

Banach 代数　一个 Banach 代数是一个完备的赋范代数，即它是一个代数同时又是一个 Banach 空间．

例 1　(i) C，用通常的加法和乘法，且对 $x\in C$，定义 $\|x\|=|x|$，这是具有单位元的可交换 Banach 代数．当然，它的范数是乘法的，即

$$\|xy\|=\|x\|\cdot\|y\|.$$

(ii) R，就其通常的结构来说，是一个具有单位元的实可交

换 Banach 代数.

例 2 R^2, 关于按坐标的线性运算, 以及 $x=(x_1, x_2)$时, $\|x\|=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$, 是一个实 Banach 空间. R^2 在"复数"乘法:

$$xy=(x_1y_1-x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$$

下, 成为一个具有单位元的实可交换 Banach 代数. 注意, 这时也有 $\|xy\|=\|x\|\cdot\|y\|$.

例 3 $C[0, 1]$ 是一个函数代数的例子. 我们已知 $C[0, 1]$ 是 Banach 空间. 若现在对 $x, y\in C[0, 1]$, 用 $xy(t)=x(t)\cdot y(t)$ 来定义 xy, 那么由于两个连续函数的乘积是连续函数, 因此 $xy\in C[0, 1]$. 现在很明显, $C[0, 1]$ 是一具有单位元的可交换代数. 而且 $\|xy\|=\max|x(t)\cdot y(t)|=|x(t_0)\cdot y(t_0)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$, 因而 $C[0, 1]$ 是一个 Banach 代数.

例 4 第二章例 9 的空间 A 是一个重要的 Banach 代数, 称为圆盘(disc)代数. 象上面例 3 那样定义逐点乘法, 那么 A 是一个具有单位元($f(z)=1$, $|z|\leqslant1$)的可交换代数. 现在$\|f\|=\max|f(z)|$, 即 $|z|\leqslant1$ 上的最大值作为它在 A 上的范数. 显然这个范数是次乘法的. 剩下的是要证明 A 是完备的.

设(f_n)是 A 中的 Cauchy 序列, 那么$(f_n(z))$对每一个 z, $|z|\leqslant1$, 是 C 中的 Cauchy 序列. 因此当 $n\to\infty$ 时, $f_n(z)\to f(z)$ 在 $|z|\leqslant1$ 上的收敛是一致的. 从而 f 在 $|z|\leqslant1$ 上是连续的. 现在设 Γ 是 $|z|<1$ 内的简单闭曲线, 由于 $f_n(z)\to f(z)$ 在 Γ 上是一致收敛的, 我们有

$$\lim_n\int_\Gamma f_n(z)\,dz=\int_\Gamma f(z)\,dz.$$

由 Cauchy 定理, 左边的每一个积分是零, 因此它的极限为零. 于是对 $|z|<1$ 中的每个 Γ, 右边的积分是零. 由 Morera 定理得到 f 在 $|z|<1$ 上是解析的. 因此 $f\in A$, 从而 A 是完备的.

例 5 用 M^n 表示 a_{ij} 是复数的 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 全体所成的集. 如果定义

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}),\quad \lambda A=(\lambda a_{ij}),$$

那么 M^n 成为一个线性空间. 通常矩阵的乘法

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

使 M^n 成为一个代数. 矩阵 $I=(\delta_{ij})$, $\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}=0$ $(i\neq j)$, 是其单位元. 如所周知, 矩阵乘法是不可交换的. 定义

$$\|A\|=\max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,\middle|\,1\leqslant i\leqslant n\right\},$$

这使 M^n 成为一个赋范代数. 容易证明, 在此范数下 M^n 是完备的.

例 6 设 X 是一个赋范空间, 那么$B(X, X)$, 即所有 X 到自身中的有界线性算子的集合, 是一个赋范线性空间. 此结果是第四章 §2 定理 7 的一个特殊情形. 现在定义 $A_1, A_2\in B(X, X)$的乘法为算子的复合$(A_1A_2)x=A_1(A_2(x))$. 显然, 当 A_1, A_2 是线性的时, A_1A_2 也是线性的. 并且, 当 A_1, A_2 是有界的时,

$$\|(A_1A_2)(x)\|\leqslant\|A_1\|\cdot\|A_2(x)\|\leqslant\|A_1\|\cdot\|A_2\|\cdot\|x\|,$$

因此 $\|A_1A_2\|\leqslant\|A_1\|\cdot\|A_2\|$. 由于用 $E(x)=x$ (对所有 $x\in X$) 定义的 E 也在$B(X, X)$中, 我们看到 $B(X, X)$ 也是具有单位元的赋范代数.

若 X 是一个 Banach 空间, 那么由第四章定理 7(ii) 推断出 $B(X, X)$是一个具有单位元的 Banach 代数. $B(X, X)$是所谓算子代数的一个例子.

在任何具有单位元 e 的代数中, 有逆元的元素称为可逆元, 即当且仅当存在 x 的逆元 y, 使得 $xy=yx=e$ 时, x 是可逆元, 记 $y=x^{-1}$. 注意, 当 x^{-1} 存在时, 那么它是唯一的. 显然, e 是一个可逆

元，而 θ 不是一个可逆元.

考虑上面的例 1(i)，C 的每一个非零元素是可逆元. 同样，R^2 的每一个非零元素(例 2)是可逆元. 而在例 3 的 $C[0, 1]$ 中，存在不是可逆元的非零元素. 例如，给出 x: 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上，$x(t)=0$; 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上，$x(t)=t-\frac{1}{2}$. 这些结果引导我们作出下面的定义.

可除代数 一个具有单位元的代数，若是其中每一个非零元素都是可逆元，就称为可除代数.

C 和例 2 中的 R^2 都是可除代数，它们都是可交换的.

一个四维不可交换的实可除代数，是由著名的爱尔兰数学家 W. R. Hamilton (1805—1865) 发现的. 1878 年 Frobenius 证明了 Hamilton 代数(称为四元数)实质上是唯一的有限维的不可交换的实可除代数.

例 7(四元数) 这个代数 H (代表"Hamilton")是实线性空间 R^4，赋予了一种特殊的乘法而成为不可交换的可除代数. 仿效 Hamilton 用 $1, i, j, k$ 表示 R^4 的单位向量. 明确地说，记 $1=(1, 0, 0, 0)$，$i=(0, 1, 0, 0)$，$j=(0, 0, 1, 0)$，$k=(0, 0, 0, 1)$. 一旦定义了乘积 ij, jk, 等等，则可用通常的方法相乘

$$xy=(x_1+ix_2+jx_3+kx_4)(y_1+iy_2+jy_3+ky_4).$$

单位向量的乘法定义为

$$1\cdot m=m\cdot 1=m, \quad m=1, i, j, k,$$

$$m^2=-1, \quad m=i, j, k,$$

$$ij=-ji=k, \quad jk=-kj=i, \quad ki=-ik=j.$$

立即看出，Hamilton 已牺牲了可交换的乘法——在离今遥远的当时是一个大胆的步骤. 现在验证 H 是一个具有单位元 1 的代数就是很容易的事了.

当用复数进行运算时，利用共轭复数 $\bar{x}=x_1-ix_2$ 是有益的，

这时 $x\bar{x}=|x|^2=x_1^2+x_2^2$. 与此类似，对每一个$x\in H$，令 $\bar{x}=x_1-ix_2-jx_3-kx_4$，则有

$$x\bar{x}=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,$$

由此产生出自然的范数

$$\|x\|=(x\bar{x})^{1/2}.$$

显然，H 在这个范数下是完备的．对任何 $x, y\in H$，容易验证 $\overline{xy}=\bar{x}\cdot\bar{y}$，由此得到 $\|xy\|=\|x\|\cdot\|y\|$．现在，若 $x\neq\theta$，则$\|x\|>0$，因此，$x\bar{x}\|x\|^{-2}=1$，由此 x 的逆元是 $\bar{x}\|x\|^{-2}$．综上所述，H 是一个不可交换的实 Banach 代数．

习　题　1

1．设一个赋范代数具有单位元 e，证明 $\|e\|\geqslant 1$.

2．在一个赋范代数中，证明乘法是连续的，即当 $x\to x_0$, $y\to y_0$ 时，$xy\to x_0y_0$，这里的收敛是依范数收敛．

3．设 X 是没有单位元的代数，考虑笛卡儿(Descartes)乘积 $Y=C\times X$，在 Y 中用通常的按坐标方式定义线性运算．定义 Y 中的乘法如下：

$$(\lambda_1, x_1)(\lambda_2, x_2)=(\lambda_1\lambda_2,\ \lambda_1x_2+\lambda_2x_1+x_1x_2).$$

证明 Y 是一个具有单位元的代数．并证明 X 可同构地嵌入 Y 内，即 X 同构于 Y 的一个子集(参看§2关于同构代数的概念)．

4．若上面第3题中的 X 是 Banach 代数，说明如何在 Y 中定义一个范数，使 Y 成为一个 Banach 代数．

5．设 $l_1(Z)=\{x;\ Z\to C\,|\,\sum|x(k)|<\infty\}$，这里(在本问题中)是对$-\infty$到$\infty$的 k 求和．证明 $l_1(Z)$是一个线性空间，同时 $\|x\|=\sum|x(k)|$ 是 $l_1(Z)$ 上的一个范数．并证明由

$$xy(n)=\sum x(n-k)y(k)$$

定义的 xy 使 $l_1(Z)$ 成为 Banach 代数．刚才定义的乘法通常称为卷积，并且常用 $x*y$ 而不是用 xy 表示．

6．例4中的 A 是一个可除代数吗？

7．证明对 $n>1$ 时，例5中的 M^n 不是一个可除代数．

8．(i) 若 $x,y\in H$，H 为四元数代数，证明 $\overline{xy}=\bar{y}\cdot\bar{x}$，并推出 H 的范数

是乘法的:

$$\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

(ii) 设 $x \neq \theta$ 是 H 的元素,令 $xy=(1, 0, 0, 0)$ 的系数相等,解所得的四个方程去找出 x 的逆元 y.

(iii) 证明有无限多个 $x \in H$, 使 $x^2=-1$.

(iv) 证明 $G=\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ 在四元数的乘法下是一个群.

9. 设 X 是一个具有单位元 e 的可交换代数,并设 x 不是可逆元,且定义

$$S=\{xy \mid y \in X\}.$$

证明:

(i) $S \neq \emptyset$,

(ii) $e \notin S$,

(iii) S 是 X 的一个线性子空间,

(iv) 若 $z \in X$, $s \in S$, 则有 $zs \in S$.

§2 同态与同构

在代数与代数间的映射中,保持线性关系和乘法运算的映射是特别重要的. 这样的映射称为

同态 设有两个代数 X, Y 和一个映射 f: $X \to Y$. 当且仅当 $f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$, $f(xy)=f(x) \cdot f(y)$ 时, 即 f 是线性的及乘法的时候,称 f 为同态映射.

两个代数之间的一个同构定义为一个双射同态. 一个同态 f: $X \to C$, 通常称为标量同态. 当我们说一个赋范代数 X 上的有界同态 f 时, 意思是指: $\|f(x)\|_Y \leqslant M\|x\|_X$ 对于某个常数 M 及所有 $x \in X$ 成立. 通常将此不等式写为 $\|f(x)\| \leqslant M\|x\|$, 虽然在"$\leqslant$"两边的范数可能是不同的.

Banach 代数理论的一个特别稀奇的特点,是十分"平常"的前提有"不平常"的结论. 这一点可以用下面的定理 1 为例很好地说明. 发生这种情况的原因,看来是在前提中存在如此多的结构(解

析的和代数的)，用"平常"一词来描述这些前提也许是不十分合适的.

我们用一个简单的引理来作为证明定理 1 的开端.

引理 设 X 是一个 Banach 代数，并设 x 满足 $\|x\|<1$，那么存在 $y\in X$，使 $xy=x+y$.

证明 由于 $\|x\|<1$ 以及 $\|x^k\|\leqslant\|x\|^k$，级数 $-x-x^2-x^3\cdots$ 是绝对收敛的. 而 X 是 Banach 空间，因此这级数收敛(第四章 §1 定理 2). 设级数的和为 y，则

$$xy=-x^2-x^3-x^4-\cdots=x+y.$$

定理 1 设 X 是一个 Banach 代数，且 $f\colon X\to C$ 是一个标量同态，那么 $|f(x)|\leqslant\|x\|$ 对所有 $x\in X$ 成立. 因而 Banach 代数上的标量同态必定是一个连续泛函.

证明 假定存在 $z\in X$，使 $|f(z)|>\|z\|$，那么 $f(z)\neq 0$，且可写 $x=z/f(z)$，从而 $f(x)=1$，且 $\|x\|<1$. 由上面的引理知道，存在 y，使 $xy=x+y$，由此 $f(x)\cdot f(y)=f(x)+f(y)$，即 $f(y)=1+f(y)$，这是矛盾的. 因此对所有的 x，必有 $|f(x)|\leqslant\|x\|$.

本章 §1 提到过，Frobenius 已证明四元数代数 H 是唯一的有限维的不可交换的实可除代数，其意义为每个这样的代数同构于 H. 事实上，Frobenius 证明了更多，即仅有三个有限维的实可除代数：R, R^2 (用复数的乘法)和 H. 这个一般结果的证明是相当复杂的，我们不希望详细讲它. 然而，一维的情形是十分简单的而且可以作为例子说明证明的思想.

定理 2 设 X 是一维的实可除代数，那么 X 同构于代数 R.

证明 设 e 是 X 的单位元，且设 $\{b\}$ 是 X 的 Hamel 基，因为 b^2 在 X 中，存在唯一的实数 λ，使 $b^2=\lambda b$. 由此得 $b(b-\lambda e)=\theta$. 但 $b\neq\theta$，因此存在 b^{-1}，使 $(b^{-1}b)(b-\lambda e)=b^{-1}\theta=\theta$，即 $b=\lambda e$. 现在每一个 $x\in X$ 可唯一地表为 $x=\mu b=\mu\lambda e$. 很清楚，从

X 到 R 的映射 $x\to\mu\lambda$ 是线性的，乘法的，并且是双射的，即它是一个同构.

在第三章定理 3 已证明了每一个 n 维线性空间都同构于 C^n. 很自然地要寻求对于 n 维代数(代数的维数即它作为线性空间的维数)的类似结果. 这个类似的结果由下面的定理提供.

定理 3 每一个具有单位元 e 的 n 维代数 X，同构于一个 $n\times n$ 矩阵代数.

证明 设 $x\in X$，对 x 用一个映射 $x^*: X\to X$ 与之对应，x^* 由 $x^*(y)=xy$, 对所有 $y\in X$ 定义. 现在可作出一个映射 f: $X\to L$，这里 $f(x)=x^*$，L 是所有映射 x^* 的集合. 容易验证，f 在 X 上是线性的. 现在证明 f 是乘法的. 若 $x=x_1x_2$, 由映射乘法(复合)的定义知道，对任何 y，有

$$x^*(y)=xy=x_1(x_2y)=x_1^*(x_2y)=x_1^*(x_2^*(y))=x_1^*x_2^*(y),$$

因此对所有 y 有 $x^*(y)=(x_1^*x_2^*)(y)$，即 $x^*=x_1^*x_2^*$, 也就是 $f(x_1x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$.

现在 f 是单射的，因为 $f(x_1)=f(x_2)$ 蕴涵 $x_1^*(y)=x_2^*(y)$ 对所有 y 成立. 取 $y=e$ 即得 $x_1=x_2$. 由 L 的定义，还有 $f(X)=L$. 因此，X 同构于由 X 到它自身中的映射组成的某个代数. 注意，我们还未用到 X 是 n 维的事实. 现在完成定理的证明如下：设 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 是 X 的 Hamel 基，则 X 中每一个元 y 可写成 $y=\sum\lambda_i b_i$ 的形式，"Σ"是从 1 到 n 求和. 于是，对 X 中每一个 x

$$x^*(y)=\sum_i\lambda_i x^*(b_i)=\sum_i\lambda_i\sum_j a_{ij}b_j=\sum_j b_j\Big(\sum_i a_{ij}\lambda_i\Big).$$

现在，很容易验证映 x 成矩阵 $A=(a_{ij})$ 的映射是一个同构.

习 题 2

1. 设 X 是一个有限维实可除代数，具有单位元 e. 证明每一个 x 满足一个二次方程

$$\lambda_0 e+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2=\theta,$$
其中系数是实的而且 $|\lambda_1|+|\lambda_2|>0$.

2．设 $\|x\|\leqslant c<1$, 其中 x 是具有单位元 e 的 Banach 代数的元素，证明

(i) $(e+x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=e-x+x^2-\cdots,$

(ii) $\|(e+x)^{-1}-e+x\|\leqslant M\|x\|^2,$

M 是某个常数.

3．X 是一个代数，$S=\{x\in X|xy=yx$ 对所有 $y\in X\}$. 集合 S 称为 X 的中心. 证明 S 是 X 的一个子代数，即在 X 的代数运算下，S 自己是一个代数.

4．X 是一个代数，I 是 X 的线性子空间，且当 $x\in X$, $i\in I$ 时，有 $xi\in I$ 和 $ix\in I$. 这样的 I 称为 X 的一个理想. 定义 $x\sim y$ 的意义为 $x-y\in I$. 证明"$\sim$"是一个等价关系，且当 $x_1\sim x_2$, $y_1\sim y_2$ 时，可推出 $x_1y_1\sim x_2y_2$. 若 E_x 是含 x 的等价类，定义 $E_x+E_y=E_{x+y}$, $\lambda E_x=E_{\lambda x}$, $E_xE_y=E_{xy}$. 证明：$\{E_x|x\in X\}$ 是一个代数. 这个代数就是所谓 X 关于理想 I 的商代数，用 X/I 表示.

5．设 X, Y 是代数，f: $X\to Y$ 是一个同态，证明 f 的核
$$\mathrm{Ker}(f)=\{x\in X|f(x)=\theta\}$$
是 X 的理想，理想的定义见第 4 题. 证明：当且仅当 f 是同构时，$\mathrm{Ker}(f)=\{\theta\}$.

6．在第 5 题中，若同态 f 是满射的，证明商代数 $X/\mathrm{Ker}(f)$ 同构于 Y.

7．(i) X 是一个代数，S 是 X 上的所有标量同态的集合，X 的根(radical)定义为
$$\mathrm{rad}(X)=\cap\{\mathrm{Ker}(f)|f\in S\}.$$
证明 rad(X)是一个理想，即 rad(X)是一线性子空间，而由 $i\in\mathrm{rad}(X)$, $x\in X$, 就有 ix 和 $xi\in\mathrm{rad}(X)$.

(ii) 设 X 是 2×2 矩阵 A 中 $a_{21}=0$ 的矩阵的集合. 证明 X 在矩阵乘法下是一个代数，且
$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$
是 X 的一个 Hamel 基，由此决定(i)中的集合 S, 且证明
$$\mathrm{rad}(X)=\left\{\begin{pmatrix}0&z\\0&0\end{pmatrix}\middle|z\in C\right\}.$$

§3 谱和 Gelfand-Mazur 定理

本节主要的是证明 Gelfand 和 Mazur 的著名的结果：复代数 C 是唯一的复 Banach 可除代数，它的意义是每个复 Banach 可除代数都同构于 C.

为证明此定理，我们规定一些记号，作出某些定义作为准备。本节除非特别指出，X 都表示一个具有单位元 e 的 Banach 代数。代数总是理解为一个复代数，虽然有时并不强调这一点。除非作出相反的特别说明，X 就不必须是一个可除代数.

可逆元　设 $x\in X$. 当且仅当存在 x^{-1} 时称 x 为 X 的可逆元. 用 U 表示所有可逆元的集合.

正则点　设给定 $x\in X$，$\lambda\in C$. 当且仅当 $x-\lambda e\in U$ 时，称 λ 为 x 的一个正则点.

谱　一个元素 $x\in X$ 的谱 $\sigma(x)$，是 x 的所有非正则点的集合. 因此，当且仅当 $x-\lambda e\notin U$ 时，$\lambda\in\sigma(x)$.

我们注意，$\sigma(x)$ 是 C 的子集. 下面的定理 10 证明了对一复的具有单位元的 Banach 代数中的每个 x，总有 $\sigma(x)\neq\emptyset$. 而对实的情形，则可能存在 x 使 $\sigma(x)=\emptyset$.

例 8　考虑具有单位元的实 Banach 代数 M^2 (参看例 5)，要找 $\sigma(A)$，这里

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

现在 $\sigma(A)=\{\lambda\in R\,|\,A-\lambda I \text{ 无逆元}\}$. 利用一个已知的矩阵代数的基本定理，即当且仅当 $\det(A-\lambda I)=0$ 时，$A-\lambda I$ 没有逆元. 因此，$\sigma(A)=\{\lambda\in R\,|\,\det(A-\lambda I)=0\}$. 但 $\det(A-\lambda I)=\lambda^2+1$，没有实数值使 $\lambda^2+1=0$ 成立，因此 $\sigma(A)=\emptyset$.

读者可能知道，某些算子的特征值理论在量子力学中是极为

重要的．我们并不认为在这里讨论量子力学中碰到的问题是适宜的．然而，我们将定义赋范线性空间的算子的特征值这一术语，并且表明这个概念与算子的谱有怎样的关系．

算子的特征值 设 X 是一个赋范线性空间，A 是 X 到它自身中的有界线性算子的集合 $B(X, X)$ 中的一个元素．对于 $\lambda\in C$，当且仅当至少存在一个 $x\neq\theta$，使 $Ax=\lambda x$ 时，称 λ 是 A 的一个特征值．用 $\mathrm{Eig}(A)$ 表示 A 的所有特征值的集合．

在算子的通常的代数运算下，集合 $B(X, X)$ 是具有单位元的一个代数．因此可考虑 $B(X, X)$ 中的一个算子 A 的谱 $\sigma(A)$．

特征值的集合和谱之间的一般关系由下面定理给出．

定理 4 $\mathrm{Eig}(A)\subset\sigma(A)$．

证明 由 $\lambda\in\mathrm{Eig}(A)$ 知，存在 $x_0\neq\theta$，使 $Ax_0=\lambda x_0$，即 $(A-\lambda E)x_0=\theta$，这里的 E 是恒等(identity)算子．现在若 $(A-\lambda E)^{-1}$ 存在，则它是一个线性算子，且有

$$(A-\lambda E)^{-1}(A-\lambda E)x_0=(A-\lambda E)^{-1}\theta=\theta,$$

即 $x_0=\theta$．这与 $x_0\neq\theta$ 矛盾．因此，$A-\lambda E$ 没有逆元，即 $\lambda\in\sigma(A)$．定理证完．

定理 4 中的“$\subset$”可以是严格的．

例 9 考虑算子 A: $l_2\rightarrow l_2$，它由

$$Ax=(0, x_1, x_2, \cdots)$$

给出，其中 $x=(x_1, x_2, x_3, \cdots)\in l_2$．显然，$A$ 是线性的及有界的．我们将证明 $\mathrm{Eig}(A)=\emptyset$，但 $0\in\sigma(A)$．首先，若 $0\in\mathrm{Eig}(A)$，那么对某个 $x\neq\theta$，成立 $(0, x_1, x_2, \cdots)=\theta$，这是不可能的．其次，若 $\lambda\in\mathrm{Eig}(A)$，$\lambda\neq0$，则存在 $x\neq\theta$，使得

$$(0, x_1, x_2, \cdots)=(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots)$$

成立．因此，$0=x_1$，$x_1=\lambda x_1$，$\cdots$，从而 $x=\theta$，矛盾．因此 $\mathrm{Eig}(A)=\emptyset$.

现在，$0\in\sigma(A)$，当且仅当 A 没有逆元时成立．但 A 是没有逆元的，因为若 A 有逆元 A^{-1}，则 $A(A^{-1}x)=x$ 对所有的 $x\in l_2$ 成立．令 $x=(1, 0, 0, \cdots)$ 则得到 $A(A^{-1}x)=(1, 0, 0, \cdots)$，而由 A 的定义得到 $A(A^{-1}x)=(0, 0, \cdots)$，这矛盾表明 A 没有逆元．因此，$\sigma(A)$ 包含 0.

由此得到一系列结果，其顶峰是 Gelfand-Mazur 定理．

定理 5 若 $\|e-x\|<1$，那么 $x\in U$．

证明 $\sum\limits_0^\infty\|(e-x)^k\|<\infty$，因此若写 $x=e-(e-x)$，就有

$$x\left(e+\sum_1^\infty(e-x)^k\right)=e,$$

即 x 的逆元是 $e+\sum\limits_1^\infty(e-x)^k$．

推论 若 $\lambda\in C$ 且 $\|x\|<|\lambda|$，那么 $x-\lambda e\in U$．

定理 6 U 是 X 的一个开子集．

证明 设 $x\in U$，记 $S(x)=\{y|\ \|x-y\|<\|x^{-1}\|^{-1}\}$，则 $\|e-yx^{-1}\|<1$，对 $y\in S(x)$ 成立．

由定理 5 得到，当 $y\in S(x)$ 时，$yx^{-1}\in U$．现在当 $y\in S(x)$ 时，y 有逆元 $x^{-1}(yx^{-1})^{-1}$．因此，由 $y\in S(x)$ 必有 $y\in U$．所以 U 是开集．

定理 7 对每个 $x\in X$，谱 $\sigma(x)$ 是 C 的一个紧致子集．

证明 由 Heine-Borel 定理，只要证明 $\sigma(x)$ 是有界闭集就够了．取 $\lambda\in\sigma(x)$，则 $x-\lambda e\notin U$，由定理 5 的推论得到 $\|x\|>|\lambda|$．因此，$\sigma(x)$ 在以 $(0, 0)$ 为中心，$\|x\|$ 为半径的圆盘内．

现在设 $\lambda_0\in\sim\sigma(x)$，则 $x-\lambda_0 e\in U$．记 $x-\lambda e=f(\lambda)$，由定理 6 知，存在 $S(f(\lambda_0))\subset U$．令 $\lambda\to\lambda_0$，则 $f(\lambda)\to f(\lambda_0)$，从而存在一个邻域 $N(\lambda_0)$，使当 $\lambda\in N(\lambda_0)$ 时，$f(\lambda)\in S(f(\lambda_0))$ 成立．因此，由 $\lambda\in N(\lambda_0)$ 必有 $f(\lambda)\in U$，由此 $\lambda\in\sim\sigma(x)$．于是 $\sim\sigma(x)$ 是开

集，从而 $\sigma(x)$ 是闭的.

定理 8 设 $y, y_0 \in U$，那么当 $y \to y_0$ 时，有

$$(\text{i})\ y^{-1}y_0 \to e, \qquad (\text{ii})\ y^{-1} \to y_0^{-1}.$$

证明 （i）给定 $\varepsilon > 0$，若 $y \to y_0$，则 $y_0^{-1}y \to e$，因此，存在 δ_1，使当 $\|y - y_0\| < \delta_1$ 时，有 $\|y_0^{-1}y - e\| < 2^{-1}$. 由定理 5，有

$$(y_0^{-1}y)^{-1} = e + \sum (e - y_0^{-1}y)^k,$$

$$y^{-1}y_0 - e = \sum (e - y_0^{-1}y)^k.$$

因此，当 $\|y - y_0\| < \delta_1$ 时，有

$$\|y^{-1}y_0 - e\| < \sum_1^n \|e - y_0^{-1}y\|^k + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

取 n 充分大，使 $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$，且选择 $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$ 充分小，使当 $\|y - y_0\| < \delta_2$ 时，有限和

$$\sum_1^n \|e - y_0^{-1}y\|^k < \varepsilon.$$

这是可能的，因为当 $y \to y_0$ 时，有 $y_0^{-1}y \to e$. 因此，只要 $\|y - y_0\| < \min(\delta_1, \delta_2)$，我们就有 $\|y^{-1}y_0 - e\| < 2\varepsilon$，这证明了(i).

（ii）由(i)知道，当 $y \to y_0$ 时，有 $y^{-1}y_0 \to e$，因此

$$\|(y^{-1}y_0)y_0^{-1} - y_0^{-1}\| \leqslant \|y_0^{-1}\| \|y^{-1}y_0 - e\| \to 0,$$

即当 $y \to y_0$ 时，有 $y^{-1} \to y_0^{-1}$.

定理 9 对每个 $x \in X$，$x(\lambda) = (x - \lambda e)^{-1}$ 在 $\sim\sigma(x)$ 上是解析的.

证明 若 $\lambda \in \sim\sigma(x)$，则 $(x - \lambda e) \in U$. 因此，$x(\lambda)$ 有定义. 由定理 7，$\sim\sigma(x)$ 是开集. 现设 $\lambda, \lambda_0 \in \sim\sigma(x)$，那么容易验证:

$$x(\lambda_0) = x(\lambda) + (\lambda_0 - \lambda)x(\lambda)x(\lambda_0).$$

由定理 8(ii)，当 $\lambda \to \lambda_0$ 时，有 $x(\lambda) \to x(\lambda_0)$. 由此

$$\frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \to \{x(\lambda_0)\}^2 \qquad (\text{当 } \lambda \to \lambda_0).$$

这样，在第四章§5所规定的意义下，$x(\lambda)$是解析的.

在这个阶段，我们提醒读者，X是一个具有单位元的复Banach代数.

定理10 对每一个$x\in X$，$\sigma(x)\neq\emptyset$.

证明 若$\sigma(x)=\emptyset$，则对所有的λ，$x-\lambda e$有逆元，即

$$x(\lambda)=(x-\lambda e)^{-1}$$

对所有的λ存在. 由定理9，$x(\lambda)$是一个整函数. 现在若$\lambda\neq 0$，则

$$\|(x-\lambda e)^{-1}\|=|\lambda^{-1}|\|(e-x/\lambda)^{-1}\|.$$

因此，当$|\lambda|\to\infty$时，$x(\lambda)\to\theta$. 于是，$x(\lambda)$在C上是有界的. 由推广的Liouville定理(第四章§5定理20)有$x(\lambda)=x(0)$对所有的λ成立. 令$|\lambda|\to\infty$，得$x(0)=\theta$，因此对所有的λ有$x(\lambda)=\theta$. 由此得到$(x-\lambda e)x(\lambda)=\theta$，即$e=\theta$，与$X$是一个具有单位元$e\neq\theta$的代数矛盾. 因此，$\sigma(x)\neq\emptyset$.

现在可以证明Gelfand-Mazur定理了.

定理11 设X是一个复的Banach可除代数，那么X与C同构.

证明 由定理10，若$x\in X$，则有$\sigma(x)\neq\emptyset$，因此存在$\lambda\in\sigma(x)$，使得$x-\lambda e$没有逆元. 由于X是一个可除代数，由此得到$x-\lambda e=\theta$，即$x=\lambda e$. 于是对每一个$x\in X$，有一个使$x=\lambda e$的$\lambda\in C$与之对应. 这个λ是唯一的，因为若$x=\lambda e$，$x=\mu e$，$\alpha=\lambda-\mu\neq 0$，则有$\alpha e=\theta$，因此$e=\theta$，矛盾.

概括起来，有一映射$f: X\to C$，它由$f(x)=\lambda$给定，其中$x=\lambda e$. 现在，若$x=\lambda e$，$y=\mu e$，则$x+y=(\lambda+\mu)e$，$xy=(\lambda\mu)e$，所以f是线性的及乘法的. 若$f(x)=f(y)$，则有$\lambda=\mu$，因此有$x=y$. 最后若给定$\lambda\in C$，则元素$x=\lambda e\in X$满足$f(x)=\lambda$，因此f是双射的.

这就证明了定理.

推论 设 X 是一个复的 Banach 可除代数. 那么

(i) X 必定是可交换的;

(ii) X 必定是一维的.

证明 (i) 设 $x, y \in X$, 则 $x=\lambda e$, $y=\mu e$, 因此

$$xy=(\lambda e)(\mu e)=(\lambda\mu)e=(\mu\lambda)e=yx.$$

(ii) 很明显, 集合 $\{e\}$ 是 X 的一个 Hamel 基.

习 题 3

1. 设 X 是具有单位元的代数. 证明可逆元的集合 U 是一个乘法群.

2. 设 $A\in M^n$ (见例 5), 证明 $\sigma(A)$ 必定非空, 但至多有 n 个元.

3. 设

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M^2.$$

证明当且仅当 $(a+d)^2=4\det(A)$ 时, $\sigma(A)$ 是只含一点的集合.

4. 对一个代数中的任何集合 S, 设 $S^n=\{a^n \mid a\in S\}$. 若 X 是一个具有单位元的 Banach 代数, 证明

$$\sigma(x)^n=\sigma(x^n) \qquad (n=2, 3, \cdots).$$

提示: 对每一个复数 z, 有 $x^n-z^n e=(x-ze)(x^{n-1}+\cdots+z^{n-1}e)$.

5. 对第 4 题中的 X, 记 $r(x)=\sup\{|\lambda| \mid \lambda\in\sigma(x)\}$, 则称 $r(x)$ 是 x 的谱半径. 证明 $0\leqslant r(x)\leqslant\|x\|$. 用 $\sigma(x)^n=\sigma(x^n)$ 证明 $r(x^n)=\{r(x)\}^n$, 且推导出

$$r(x)\leqslant\liminf_n\|x^n\|^{1/n}.$$

6. 第 5 题中, 假设 $r(x)$ 是正的, 证明

$$\sum_1^\infty \lambda^{-k}x^{k-1}$$

对 $|\lambda|<r(x)$ 发散, 而对 $|\lambda|>r(x)$ 收敛. 并推导出

$$r(x)=\limsup_n\|x^n\|^{1/n}.$$

还要证明此公式对 $r(x)=0$ 也成立.

将第 5 题和第 6 题结合起来, 证明

$$r(x)=\lim_n\|x^n\|^{1/n}.$$

7. 设 A: $l_1\to l_1$ 由 $Ax=(x_2, x_3, \cdots)$ 定义, 其中 $x=(x_1, x_2, \cdots)\in l_1$. 证

明 A 是有界线性算子，且 $\|A\|=1$.

对于代数 $B(l_1, l_1)$，证明当 $|\lambda|>1$ 时，必有 $\lambda\notin\sigma(A)$，且当 $\lambda\leqslant 1$ 时，必有 $\lambda\in \mathrm{Eig}(A)$. 推出 A 的谱是复平面内的闭单位圆盘.

8. 对 $x=(x_1, x_2, \cdots)\in l_2$，定义 A: $l_2\to l_2$, $Ax=(0, x_1, x_2, \cdots)$，求算子 A 的谱. 这里基础的代数是 $B(l_2, l_2)$.

9. 设 A: $l_1\to l_1$ 由下面无限矩阵定义:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\cdots\cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0\cdots\cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0\cdots\cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0\cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix}.$$

于是 $Ax=(x_2+x_3+x_4+\cdots, x_1, x_2, x_3, \cdots)$，其中 $x=(x_1, x_2, \cdots)$. 设 $D=\{\lambda\,|\,|\lambda|\leqslant 1\}$ 且 $\lambda_0=(1+\sqrt{5})/2$，证明 $\sigma(A)=D\cup\{\lambda_0\}$. 这里基础的代数是 $B(l_2, l_2)$.

§4 Gelfand 表示定理

本节假定 X 是具有单位元 e 的可交换的 Banach 代数. 我们的目的是证明 Gelfand 的基本定理的弱形式. 它告诉我们一个某种类型的 Banach 代数(称为半单纯的)同构于某个函数代数.

首先定义一些在证明 Gelfand 定理中用到的简单概念. 设一集合 $I\subset X$. 当且仅当 I 是 X 的线性子空间，且由 $x\in X$, $y\in I$ 必有 $xy\in I$ 时，称 I 是一个理想. 若包含关系 $I\subset X$ 是严格的，则 I 称为真理想.

若(i) M 是一个真理想；(ii) 对于一个理想 I，只要 $I\supset M$ 是严格的，便有 $I=X$，则称 M 是极大理想. 由于假设 X 有单位元，所以有 $X\neq\{\theta\}$. 于是 $\{\theta\}$ 是一个真理想. 象前面几章一样，利用 Zorn 引理，很容易证明存在一个极大理想 M，使 $\{\theta\}\subset M$. 因此，每个 X 都包含一个极大理想，所以"所有极大理想的集合 $\hat{M}$"的说法是有意义的.

当且仅当

$$\bigcap_{M\in\hat{\mathscr{M}}} M=\{\theta\}$$

时，称 X 是半单纯的.

用 $F(\hat{\mathscr{M}})$ 表示所有在 $\hat{\mathscr{M}}$ 上有界的复值函数的集合. 对逐点加法和乘法，$F(\hat{\mathscr{M}})$ 构成具有单位元的可交换的 Banach 代数. 现在按照我们需要的形式来叙述 Gelfand 表示定理.

定理 12 设 X 是一个具有单位元的半单纯可交换的 Banach 代数. 那么 X 同构于函数代数 $f(\hat{\mathscr{M}})$ 的一个子代数.

证明 设 $M\in\hat{\mathscr{M}}$，考虑商代数 X/M. 象本章习题 2 第 5 题一样，只要用 M 代替那里的 I 即可定义 X/M. 由于 M 是一个极大理想，由此产生的 X/M 是一个可除代数. 为了证明这一点，取 X/M 的任何非零元 E，即 $E\neq M$. 取 $x\in E$，且考虑

$$I=\{xy-m\,|\,y\in X,\ m\in M\},$$

于是 $I\supset M$ 是严格的包含. 且 I 是一个理想. 由于 M 是极大理想，必有 $I=X$，由此 $e\in I$，因此对某个 $y\in X$，某个 $m\in M$，有 $xy-m=e$. 于是若 E_y 是含 y 的等价类，则

$$E_xE_y=E_{m+e}=\{z\,|\,z-(m+e)\in M\}=\{z\,|\,z-e\in M\}=E_e.$$

因此 E_y 是 $E=E_x$ 的逆元. 所以 X/M 是可除代数. 再定义

$$\|E_x\|=\inf\{\|y\|\,|\,y\in E_x\}$$

使 X/M 成为一个赋范空间(见第四章 § 1). 现在 M 的闭包 $\overline{M}$ 是一个真理想. 因为容易验证 $\overline{M}$ 是一个理想，并且若 $x\in M$ 则 x^{-1} 不存在，否则 $e\in M$，从而 $M=X$，矛盾. 于是 $M\subset\sim U$，由定理 6 知 U 是开集，从而 $\overline{M}\subset\overline{\sim U}=\sim U$. 但是 $e\notin\sim U$，所以 $e\notin\overline{M}$，因此 $\overline{M}$ 是一个真理想. 现在有 $M=\overline{M}$，因为若 $M\subset\overline{M}$ 是严格的，则 $\overline{M}=X$，与 $\overline{M}$ 是真理想矛盾. 于是 M 是一个闭的极大理想. 由第四章定理 3 知 X/M 是一个 Banach 可除代数. 由 Gelfand-Mazur 定理(定理 11)知道，X/M 同构于 C.

下一步的工作是建立 X 与 $F(\hat{M})$ 的子代数之间的同构. 取 $x\in X$, $M\in\hat{M}$. 设 $E\in X/M$是一个含 x 的等价类. 由 Gelfand-Mazur 定理, $E=\lambda E_e$, 这里 $\lambda=\lambda(x, M)\in C$. 用 $\hat{x}$ 表示 $\hat{M}$ 上的函数,定义为 $\hat{x}(M)=\lambda(x, M)$. 于是有映射 f: $X\to f(\hat{M})$,它由 $f(x)=\hat{x}$ 定义. 由 Gelfand-Mazur 定理知道 λ 作为 x 的一个函数是一个同态. 例如, $f(x)+f(y)=\hat{x}+\hat{y}=f(x+y)$, 因为 $\hat{x}(M)+\hat{y}(M)=\widehat{(x+y)}(M)$对每个 M 成立. 现在, f 是单射的. 因为如果 $f(x)=f(y)$, 那么 $\lambda(x-y, M)=0$ 对所有的 M 成立. 所以 $E_{x-y}=0\cdot E_e=M$ 对所有的 M 成立. 于是 $x-y\in\cap\{M|M\in\hat{M}\}$. 又由于 X 是半单纯的,有 $x-y=\theta$, 由此 f 是单射的.

现在很清楚, X 在 f 下的象是 $\hat{M}$ 上所有复值函数所成代数的一个子代数. 最后, $\hat{x}$ 在 $\hat{M}$ 上是有界的, 因为 $E_x(M)=\lambda(x, M)E_e(M)$, 必有

$$|\hat{x}(M)|\,\|E_e(M)\|\leqslant\|E_x(M)\|.$$

但

$$\|E_x(M)\|\leqslant\|x\| \text{ 且 } \|E_e(M)\|\geqslant 1,$$

由此, $|\hat{x}(M)|\leqslant\|x\|$ 对每个 M 成立. 于是 $\hat{x}$ 在 $\hat{M}$ 上是有界的, 从而完成了定理的证明.

注意, 我们已证明的仅是 Gelfand 表示定理的弱形式. 定理的强形式断言, 每一个具有单位元的半单纯的可交换的 Banach 代数同构于紧致 Hausdorff 空间 $\hat{M}$ 上的连续复值函数的代数的一个子代数. 要证明此结果,需要比我们掌握的更多的拓扑知识. 有兴趣的读者要详细了解时, 可参阅更高深的关于 Banach 代数的著作.

习 题 4

1. (i) 设 X 是具有单位元的可交换代数, 且假设 I 是 X 的一个真理想. 在 X 的所有真理想中,以集合的包含作为其半序关系. 用 Zorn 定理证

明存在一个极大理想 M，使 $M \supset I$.

(ii) 设 $x \in \sim U$，证明 $I = \{xy | y \in X\}$ 是 X 的一个真理想. 利用(i)证明存在一个含 x 的极大理想.

2. 设 X 是一个有单位元的可交换 Banach 代数. 证明对每个 $M \in \hat{\mathfrak{M}}$，有 $\lambda(e, M) = 1$，以及当且仅当 $x \in M$ 时，$\lambda(x, M) = 0$ 成立. 这里的记号与 Gelfand 定理中的相同.

3. (i) 设 X 是一个具有单位元的可交换 Banach 代数，记 $I = \cap \{M | M \in \hat{\mathfrak{M}}\}$. 证明 I 是一个闭理想，并且 X/I 是半单纯的.

(ii) 证明：当且仅当对任何 $M \in \hat{\mathfrak{M}}$，$\lambda(x, M) = 0$ 成立时，$x \in U$. 提示：利用第 1 题(ii)及第 2 题的第二部分.

第六章 Hilbert 空间

§1 内积空间和 Hilbert 空间

在这一章里，我们将到 Hilbert 空间作一短暂游览. Hilbert 空间的现代发展主要地不是在空间本身的理论方面，而是在空间上的算子理论方面. 不过在这本入门性质的书中，我们不打算讨论任何算子理论. 我们想要进行的全部工作就是定义象内积空间、Hilbert 空间、标准正交集这样一些基本概念，并证明一些经典的定理：Riesz-Fischer 定理，Parseval 定理，Riesz-Fréchet 定理，以及 l_2 实质上是唯一的无限维可分离的 Hilbert 空间的结论.

Hilbert 空间的理论可以说是在 1912 年从 Hilbert 的"Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (线性积分方程一般理论要义)"开始建立起来的①. 但是过了一些年才由著名数学家 J. von Neumann (1903—1957) 提供了公理基础.

基本的基础结构是：

内积空间 内积空间 X (或 pre-Hilbert 空间) 是一个具有内积 $(\cdot,\cdot)$: $X\times X\to C$ 的复线性空间，使得：(i) $(x, y)=\overline{(y, x)}$; (ii) $(\lambda x+\mu y, z)=\lambda(x, z)+\mu(y, z)$; (iii) $(x, x)\geqslant 0$, 只有当 $x=\theta$ 时取等号.

在(i)中$\overline{(y, x)}$表示(y, x)的复共轭. 在(ii)中，x, y, z 属于 X，而 λ, μ 属于 C. 对于内积还有另外的记号，如$\langle x, y\rangle$, $(x|y)$ 等，但我们不采用这些记号. 此外，有些人用 z^* 表示复共轭，而不

① D. Hilbert (1862—1943)，是德国大数学家，曾在数理逻辑、分析、几何和数学物理等方面有过重要的贡献.

用 $\bar{z}$.

从(i)和(ii)，我们可以得到$(x, \lambda y+\mu z)=\bar{\lambda}(x, y)+\bar{\mu}(x, z)$. 对于 X 中任意的 x, y 和 C 中任意的 λ, 我们有

$$0 \leqslant (x-\lambda y, x-\lambda y)=(x, x)-2 Re[\lambda(y, x)]+|\lambda|^2(y, y).$$

适当地选取 λ, 即得

$$|(x, y)| \leqslant (x, x)^{\frac{1}{2}}(y, y)^{\frac{1}{2}} \quad [\text{Schwarz 不等式}].$$

定理 1 每一内积空间都是在$\|x\|=+\sqrt{(x,x)}$下的赋范线性空间.

证明 根据内积空间定义中的(iii), $\|x\|=0$ 意味着 $x=\theta$.

$$(\lambda x, \lambda x)=\lambda\bar{\lambda}(x, x)=|\lambda|^2(x, x),$$

从而
$$\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|.$$

由于
$$(x+y, x+y)=(x, x)+2 Re[(x, y)]+(y, y),$$

并根据 Schwarz 不等式,

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2,$$

所以
$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|.$$

于是我们证明了一个内积产生一个范数, $\|x\|=+\sqrt{(x,x)}$.

Hilbert 空间 Hilbert 空间是完备的内积空间, 也就是范数是由内积产生的 Banach 空间.

同构内积空间 两个内积空间 X, X' 称为同构的, 当且仅当存在一个 $f: X \to X'$, 使得 f 是线性的、双射的, 并且对于所有的 $x, y \in X$, 满足$(f(x), f(y))=(x, y)$.

在同构空间的定义中, 对于在 X' 中的内积, 我们用了和在 X 中相同的记号. 因为 Hilbert 空间是内积空间, 所以同构概念对 Hilbert 空间也是适用的.

我们注意到, 在 Hilbert 空间的定义中容许有限维空间. 有些作者则要求 Hilbert 空间应该是无限维的, 因为有限维空间没有多大意思. 当维数问题突出时我们再加以明确说明.

例 1 (i) C^n 是在内积：$(x, y)=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$ 下的一个 n 维 Hilbert 空间.

(ii) $C[0, 1]$ 是在$(x, y)=\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt$ 下的一个无限维内积空间. 这不是一个 Hilbert 空间，因为它在 $\|x\|=\sqrt{(x, x)}$ 下是不完备的.

(iii) $L_2[0, 1]$是在$(x, y)=\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt$ 下的一个无限维 Hilbert 空间. 其完备性已在第四章 §1 中得到证明.

(iv) 设 A 是一个指标集合. 如果 $x: A\to C$, 那么 $x\in l_2(A)$ 当且仅当

$$\sup\sum|x(\alpha)|^2<\infty$$

其中上确界是在所有形如 $|x(\alpha_1)|^2+\cdots+|x(\alpha_n)|^2$ 的有限和上取的，这里 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 A 中各不相同的元素.

$l_2(A)$是在$(x, y)=\sup\sum x(\alpha)\overline{y(\alpha)}$下的一个 Hilbert 空间.

(v) $l_2=\{x|\sum|x_k|^2<\infty\}$ 是 Hilbert 原来研究的空间. 这是一个在 $(x, y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$ 下的 Hilbert 空间.

很清楚，这里的 l_2 可以看成(iv)中的 $l_2(N)$，N 表示正整数全体.

标准正交集 设 X 是一个内积空间. 我们说 x 正交于 y (写成 $x\perp y$)，当且仅当 $(x, y)=0$. 一个集合 $S(S\subset X)$称为正交的，当且仅当对于任意两个不同的向量 $x, y\in S$，都有 $x\perp y$. 如果对于所有的 $x\in S$，还有 $\|x\|=1$，那么 S 称为标准正交集.

例 2 (i) 设 $e_k=(0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots)$，其中 1 在第 k 个位置上，那么，$S=\{e_1, e_2, \cdots\}$ 是 l_2 中的标准正交集.

(ii) $S=\{e^{ikt}/\sqrt{2\pi}\,|\,k=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 是 $L_2[0, 2\pi]$中的标准正交集.

(iii) 内积空间中任意一个由非零向量所成的正交集 S 是线性无关的. 因为 $\sum\lambda_k s_k=\theta$ 蕴涵着

$$0=(\sum\lambda_k s_k,\ \sum\lambda_k s_k)=\sum|\lambda_k|^2\|{}_k\|^2,$$

因而对有关的 k, $\lambda_k=0$.

(iv) 任意一个由非零向量所成的正交集 S 可以标准化: 显然 $T=\{s\|s\|^{-1}|s\in S\}$ 是标准的.

从例 2 (iii) 中可以看出, 任一标准正交序列都是线性无关的. 给出一个线性无关的序列, 我们可以运用下述的定理 2 构造出一个标准正交序列.

定理 2 (Gram-Schmidt 标准正交化) 设 $S=\{s_1,\ s_2,\ \cdots\}$ 是内积空间中的一个线性无关的序列, 那么, 就有一个标准化正交序列 $T=\{t_1,\ t_2,\ \cdots\}$, 使得 $\text{l.hull}(S)=\text{l.hull}(T)$.

证明 因为 S 是线性无关的, 所以所有 s_k 都不等于零. 定义 $t_1=s_1\|s_1\|^{-1}$, 则 $\|t_1\|=1$. 定义 $v=s_2-(s_2,\ t_1)t_1$. 于是 $v\perp t_1$, 而由于 $\{s_1,\ s_2\}$ 是线性无关的, 所以 $v\neq\theta$. 于是 $t_2=v\|v\|^{-1}$ 是正交于 t_1 的, 而且 $\|t_2\|=1$. 一般, 我们用归纳法来继续进行, 每次定义 $v=s_n-\sum\limits_1^{n-1}(s_n,\ t_k)\ t_k$ 和 $t_n=v\|v\|^{-1}$. 从以上构造方法来看, S 和 T 具有同样的线性包的结论是很显然的.

定理 3 一个有限维的内积空间 X 必定是一个 Hilbert 空间.

证明 设 $S=\{s_1,\ \cdots,\ s_n\}$ 是一个 Hamel 基, 根据定理 2, 存在一个标准正交(也是线性无关的)集 $T=\{t_1,\cdots,t_n\}$, 使得 $\text{l.hull}(T)=\text{l.hull}(S)$. 因为 $\text{l.hull}(S)=X$, T 是 X 的标准正交 Hamel 基. 这里 $x\in X$ 意味着 $x=\sum\lambda_k t_k$, $\|x\|^2=\sum|\lambda_k|^2$, 这里的和是在 $1\leqslant k\leqslant n$ 上取的. 用一点简单的论证即可得出 X 是完备的.

习 题 1

1. 证明在任意内积空间中都有 $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$. 这个结论称为平行四边形法则.

还要证明

$$4(x, y)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2.$$

2. 设 X 是一个平行四边形法则在其中成立的 Banach 空间(见上题). 利用上题的结果证明 X 可以成为一个 Hilbert 空间.

3. 在内积空间中, 假定 $y\neq\theta$, 证明 $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ 的必要充分条件是: 对于某个实数 p, 有 $x=py$.

4. 找出在 Schwarz 不等式中等号成立的必要充分条件.

5. 证明例 2(ii)中的集合 S 在 $L_2[0, 2\pi]$中是正交的.

6. 在 Gram-Schmidt 方法(定理 2) 中, 设 S 由 $L_2[-1, 1]$ 空间中的函数 $1, t, t^2, \cdots$ 组成, 证明标准正交集 T 是由下列标准化的 Legendre 多项式组成:

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sqrt{\frac{3}{2}}\,t,\quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\,(3t^2-1),\ \cdots.$$

7. 设 X 是线性的, 那么根据第三章 §2 的定理4, X 有一个 Hamel 基 B. 证明: 假如 $x=\sum\lambda_k b_k$, $y=\sum\mu_k b_k$, 则 $(x, y)=\sum\lambda_k\bar{\mu}_k$ 是 X 的内积.

8. 证明当 $0<p\leqslant 2$ 时, $(x, y)=\sum_1^\infty x_k\bar{y}_k$ 是 l_p 中的内积. 当 $p>2$ 时它是内积吗?

9. 设 X 是一个内积空间. 证明 $x\perp y$ 等价于 $y\perp x$, 而 $x\perp x$ 等价于 $x=\theta$.

证明由 $x\perp\{y_1, \cdots, y_n\}$ 可推出 $x\perp\sum\lambda_k y_k$.

是否可由 $x\perp y$ 和 $y\perp z$ 推出 $x\perp z$ 呢?

10. 设 X 是一个内积空间.

(i) 如果 $x_n\to x$, $y_n\to y$(依范数), 证明 $(x_n, y_n)\to(x, y)$(依模).

(ii) 如果(x_n), (y_n)都是 Cauchy 序列(依范数), 证明$((x_n, y_n))$是收敛的.

11. 设 $p\geqslant 1$. 又设在 l_p 中可引进一种能产生通常的范数的内积. 证明 $p=2$.

§2 标准正交集

在§1中我们定义过标准正交集. 这里, 我们将始终假设所讨论的正交集或标准正交集都是在一个 Hilbert 空间 H 中的. 很明显, 我们得到的某些结果在任意一个内积空间仍然成立. 我们要证明 Riesz-Fischer 和 Parseval 的经典的结果. 这些结果使我们能把所有无限维可分离的 Hilbert 空间等同起来.

定理 4 如果 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 是正交的, 那么

$$\|\sum x_k\|^2=\sum\|x_k\|^2.$$

证明 $(x_1+\cdots+x_n,\ x_1+\cdots+x_n)=(x_1,\ x_1)+\cdots+(x_n,\ x_n)$.

定理 5 设 (x_k) 是一个正交序列, 那么 $\sum x_k$ 是收敛的, 当且仅当 $\sum\|x_k\|^2<\infty$.

证明 记 $s_n=x_1+\cdots+x_n$, 因而 $\sum x_k$ 收敛, 当且仅当 (s_n) 是 Cauchy 序列. 现在, 根据定理 4, 有

$$\|s_{n+p}-s_n\|^2=\|\sum_{n+1}^{n+p}x_k\|^2=\sum_{n+1}^{n+p}\|x_k\|^2,$$

于是得出所要证的结果.

Fourier 系数 设 (e_k) 是标准正交序列, $x\in H$, 则 $\alpha_k=(x,\ e_k)$ 称为 x 关于 e_k 的 Fourier 系数.

例 3 把 (e_k) 取为§1 例 2(i) 中那样的序列, 则

$$\alpha_k=(x,\ e_k)=x_k,\ \text{对于任意一个}\ x\in l_2.$$

这里我们注意到 Fourier 系数序列 (α_k) 是在 l_2 中的. 下面的定理在任意一个 Hilbert 空间中成立.

定理 6 (Bessel 不等式) 设 (e_k) 是标准正交序列, $x\in H$. 那么 $(\alpha_k)\in l_2$ 而且 $\|(\alpha_k)\|\leqslant\|x\|$, 这里 (α_k) 是 x 的 Fourier 系数序列, $\|(\alpha_k)\|$ 表示 l_2 范数.

证明 我们用 $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$ 去逼近 x. 明白地说，即考虑

$$y=x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k.$$

对于 $1\leqslant p\leqslant n$, 因为 (e_k) 是标准正交的，所以

$$(y,\ e_p)=(x,\ e_p)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(e_k,\ e_p)=0,$$

因此, $y\perp e_p$, 再根据定理 4,

$$\|x\|^2=\|y\|^2+\sum_{k=1}^{n}\|\alpha_k e_k\|^2\geqslant\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2.$$

当 $n\to\infty$ 时，就得到 Bessel 不等式.

下述经典定理是上面结果的一种逆定理.

定理 7 (Riesz-Fischer 定理) 设 (e_k) 是标准正交序列，而 (β_k) 是 l_2 中一个任意的序列. 那么存在 $x\in H$ 使得

$$\beta_k=(x,\ e_k)\text{ 而且 }\|(\beta_k)\|=\|x\|,$$

这里 $\|(\beta_k)\|$ 表示 l_2 范数.

证明 $\sum\|\beta_k e_k\|^2=\sum|\beta_k|^2<\infty$, 所以根据定理 5, $\sum\beta_k e_k$ 收敛于某个 $x\in H$. 现在假设 $n>p$, 就有

$$(x-\sum_{1}^{k}\beta_k e_k,\ e_p)=(x,\ e_p)-\beta_p.$$

依据 Schwarz 不等式，我们得到

$$|(x,\ e_p)-\beta_p|\leqslant\|x-\sum_{1}^{n}\beta_k e_k\|\to 0\quad(n\to\infty),$$

因而对于每一个 p 有 $\beta_p=(x,\ e_p)$. 最后

$$\sum_{1}^{n}|\beta_k|^2=\|\sum_{1}^{n}\beta_k e_k\|^2.$$

设 $n\to\infty$, 我们得到 $\|(\beta_k)\|^2=\|x\|^2$, 这就证明了定理.

上面刚证完的定理是在一般 Hilbert 空间中叙述的. 1907 年 Riesz 和 Fischer 原先则是就特别的情况，即特殊的 Hilbert 空间 $L_2[0,\ 2\pi]$ 及其标准正交集 $\{e^{ikt}/\sqrt{2\pi}\}$ 证明这个定理的. 应该指

出，在定理 7 中隐含着空间的完备性．它在这个定理中只是假设的一个部分．而在原先的 Riesz-Fischer 定理中 $L_2[0, 2\pi]$ 的完备性是需要加以证明的，这可不是轻而易举的事(见第四章 § 1)．因此，经典结果的成就比起由定理 7 肤浅地看出的要大得多．

现在我们来定义重要概念：完全集．

完全集 集合 S 称为 H 中的完全集，当且仅当由 $x\in H$，以及对于所有的 $s\in S$，有 $(x, s)=0$，可推出 $x=\theta$．

例 4 $S=\{e_k\}$ 是 l_2 中的完全集，因为如果对于所有的 k，$(x, e_k)=0$，那么对于所有的 k，$x_k=0$，也就是 $x=\theta$．

定理 8（Parseval 定理） 设 (e_k) 是标准正交序列，则 (e_k) 是完全集的充分必要条件是：对于每一个 $x\in H$，$\|x\|^2=\sum|\alpha_k|^2$，这里 $\alpha_k=(x, e_k)$．

证明 如果 $\|x\|^2=\sum|\alpha_k|^2$，并且对于所有的 k，$(x, e_k)=0$，那么，$\|x\|^2=0$，从而 $x=\theta$．

反过来，假定 (e_k) 是完全集．设 $x\in H$，那么根据定理 6，$(\alpha_k)\in l_2$．根据定理 7(Riesz-Fischer 定理)，存在 $y\in H$，使得

$$\alpha_k=(y, e_k) \quad 并且 \quad \|y\|^2=\sum|\alpha_k|^2.$$

于是对于所有的 k，$(x-y, e_k)=\alpha_k-(y, e_k)=0$．因为 (e_k) 是完全集，所以 $x=y$．结果也就得到了．

推论 如果 (e_k) 是一个完全标准正交序列，那么每一个 $x\in H$ 有 Fourier 展开：$x=\sum\alpha_k e_k$，这里 $\alpha_k=(x, e_k)$．

证明 根据定理 7 和定理 8，如果 $x\in H$，则 $x=\sum\alpha_k e_k$．

定理 9 设 H 是一个可分离的无限维 Hilbert 空间，则 H 与 l_2 同构．

证明 在 H 中存在稠密集 $S=\{s_k\}$．设 $x\in H$，那么对于某些序列 (s_{k_i}) 有 $s_{k_i}\to x$．于是由对于所有的 $s_k\in S$，$(x, s_k)=0$ 成立可推出 $\lim_i(x, s_{k_i})=(x, x)=0$，所以 $x=\theta$．因此 S 是完全集．

利用 Zorn 引理，我们可以从一个线性空间中的任意给定集合出发，确定一个线性无关的子集，其线性包是给定集合的线性包(应用第三章 § 2 中定理 4 的论据)．于是我们可以确定 S 的一个线性无关的子集 $T=\{t_k\}$，使得 $\mathrm{l.\,hull}(T)=\mathrm{l.\,hull}(S)$．如果对于所有 $t_k\in T$，$(x, t_k)=0$，那么对于每一个 k，都有 $(x, s_k)=(x, \sum\lambda_i t_i)=\sum\bar{\lambda}_i(x, t_i)=0$．从而 $x=\theta$，所以 T 是完全集．根据定理 2，我们通过 T 的标准正交化去产生一个集合 $E=\{e_k\}$，可以用证明 T 是完全集的相同的论据来说明 E 是完全集．

根据定理 8 的推论，每一个 $x\in H$ 都可以写成 $x=\sum\alpha_k e_k$．由此推知 E 不是有限的．

现在我们用 $f(x)=(\alpha_k)$，其中 $\alpha_k=(x, e_k)$，来定义 $f:\ H\to l_2$．那么根据 Bessel 不等式、E 的完全性和 Riesz-Fischer 定理，相应地有：f 是有定义的、单射的和满射的．显然，f 是线性的．最后，根据定理 8 的推论，如果 $x, y\in H$，那么 $x=\sum\alpha_k e_k$，$y=\sum\beta_k e_k$，这里的 α_k，β_k 分别是 x，y 的 Fourier 系数．现在，

$$\left(\sum_1^n\alpha_k e_k, \sum_1^n\beta_k e_k\right)=\sum_1^n\alpha_k\bar{\beta}_k,$$

令 $n\to\infty$，我们得到 $(x, y)=\sum\alpha_k\bar{\beta}_k$．但是 $\sum\alpha_k\bar{\beta}_k=((\alpha_k), (\beta_k))$，其中 $(\,,)$ 是 l_2 中的内积．由于 $(x, y)=(f(x), f(y))$，因而我们此刻已证明 f 是两个 Hilbert 空间间的一个同构．这就证明了定理．

习　题　2

1．设 (x_k) 是一个 Hilbert 空间中的正交序列，假定 $(\|x_k\|)\in l_p$，这里 $0<p<2$．证明 $\sum x_k$ 是收敛的．问：正交性可能放宽吗？

2．设 (e_k) 是内积空间中的标准正交序列．证明

(i) Fourier 系数的序列 (α_k) 属于 c_0．

(ii) 对于任意的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，

$$\|x-\sum_1^n\lambda_k e_k\|^2=\|x\|^2-\sum_1^n|\alpha_k|^2+\sum_1^n|\alpha_k-\lambda_k|^2.$$

由此推出结论：Fourier 系数给出 x 的通过 $e_1, \cdots, e_n$ 的线性组合的最佳逼近.

3．假设 (e_k) 是 H 中的标准正交集，而 (λ_k) 是一个标量序列，使得 $\sum \lambda_k e_k$ 收敛于 x. 证明 λ_k 是 x 对于 e_k 的 Fourier 系数.

4．设 (e_k) 是 H 中的标准正交集．证明 (e_k) 是完全集当且仅当对于每一 $x \in H$, $x = \sum \alpha_k e_k$.

5．证明每一个 n 维内积空间与 C^n 是同构的.

6．(i) 在讲 Lebesgue 积分的书里已经证明 $L_2[0, 2\pi]$ 是可分离的．利用这个结果证明 $L_2[0, 2\pi]$ 是与 l_2 同构的.

(ii) 利用 Fejér 关于 Fourier 级数的 Cesàro 可和性的经典定理可以证明：如果 $x \in L_2[0, 2\pi]$，那么就有

$$\int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

其中

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

用这个结果证明 $L_2[0, 2\pi]$ 与 l_2 是同构的.

7．如果 $f \in L_2^*[0, 2\pi]$，证明存在 $y \in L_2[0, 2\pi]$，使得对于所有的 $x \in L_2[0, 2\pi]$ 有

$$f(x) = \int_0^{2\pi} x(t) \overline{y(t)} dt.$$

§3 Hilbert 空间的对偶空间

如果 H 是一个 Hilbert 空间，那么人们立即可以写出 H 上有界线性泛函的一些例子．根据内积的定义，由 $f(x) = (x, y)$（其中 y 是固定的）所定义的 f 是线性的．根据 Schwarz 不等式（见 §1），对于所有的 $x \in H$，我们也有 $|f(x)| \leqslant \|x\| \|y\|$，所以 $\|f\| \leqslant \|y\|$．事实上有 $\|f\| = \|y\|$，这只要取 $x = y$ 就可以看出来.

一个很值得注意的事实是：内积是 H 上仅有的有界线性泛函．这个结论称为 Riesz-Fréchet（或 Riesz）表示定理．我们将在下面的定理 13 中给出证明.

这里先给出几个预备定理.

定理 10 设$G\neq H$是H的一个闭子空间，用$d=d(h,G)$表示从G到h的距离，这里$h\in H\sim G$. 那么存在$g\in G$，使得$\|h-g\|=d$，即G中有最接近于h的一个点.

证明 存在$(x_n)\in G$，使得$\|h-x_n\|\to d\ (n\to\infty)$. 只要证明$(x_n)$是 Cauchy 序列就够了. 由于$G$是完备的(因为是闭的)，我们得到$x_n\to g\ (n\to\infty)$，从而$\|h-g\|=d$. 现在

$$\begin{aligned}\|x_n-x_m\|^2&=\|(h-x_m)+(x_n-h)\|^2\\&=2(\|h-x_m\|^2+\|x_n-h\|^2)-\|2h-(x_n+x_m)\|^2\\&=2(\|h-x_m\|^2+\|x_n-h\|^2)-4\left\|h-\frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2\\&\to 2(d^2+d^2)-4d^2=0\quad(n,\ m\to\infty).\end{aligned}$$

上面我们利用了所谓平行四边形法则:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),$$

也利用了下面的事实:

$$d\leqslant\left\|h-\frac{x_n+x_m}{2}\right\|\leqslant\frac{1}{2}\left\|h-x_n\right\|+\frac{1}{2}\left\|h-x_m\right\|.$$

这样我们已经证明(x_n)是一个 Cauchy 序列，所以定理得到证明了.

定理 11 采用定理 10 中同样的假设，那么$(h-g)\perp G$，也就是对于所有的$x\in G$，$(h-g,\ x)=0$.

证明 假定存在$x\in G$，使得$\lambda=(h-g,\ x)\neq 0$，那么$x\neq\theta$，所以我们可以定义$k=g+\lambda\|x\|^{-2}x\in G$. 于是$\|h-k\|^2=\|h-g\|^2-|\lambda|^2\|x\|^{-2}<\|h-g\|^2$与$\|h-g\|=d$这一事实相矛盾.

正交和 如果M_1, M_2是内积空间的子空间，那么M_1+M_2也是一个子空间. 当$M_1\perp M_2$，也就是对于每一个$m_1\in M_1$，$m_2\in M_2$，都有$(m_1,\ m_2)=0$时，把M_1+M_2写成$M_1\oplus M_2$，并把$M_1\oplus M_2$称为M_1与M_2的正交和.

定理 12 设 G 是 H 的一个闭子空间. 记 $G^{\perp}=\{x\in H|x\perp G\}$. 那么 $H=G\oplus G^{\perp}$.

证明 设 $h\in H$. 如果 $h\in G$, 那么显然 $h\in G+G^{\perp}$. 假定 $h\in H\sim G$, 根据定理 11, 有 $h-g\in G^{\perp}$, 从而 $h=g+(h-g)\in G+G^{\perp}$. 于是 $H=G+G^{\perp}$. $G\perp G^{\perp}$ 是明显的,所以 $H=G\oplus G^{\perp}$.

定理 13 (Riesz-Fréchet 定理) 设 $f\in H^*$, H^* 是 Hilbert 空间 H 的对偶空间. 那么存在唯一的一个 $y\in H$, 使得对于所有的 $x\in H$, $f(x)=(x, y)$. 这个 f 还满足 $\|f\|=\|y\|$.

证明 记 $G=\mathrm{Ker}(f)$. 那么 G 是 H 的一个闭子空间. 如果 $G=H$, 则 $f\equiv 0$, 于是我们取 $y=\theta$. 假定 $G\neq H$, 根据定理 11, 存在一个非零 $z\perp G$.

考虑 $S=\{zf(x)-xf(z)\,|\,x\in H\}$.

那么 $S\subset G$. 又因为 $z\perp S$, 于是对于每一个 x, 我们有

$$(zf(x)-xf(z),\ z)=0,$$

$$f(x)\|z\|^2=(x,\ z)f(z).$$

所以对于每一个 x, 有 $f(x)=(x, y)$, 这里 $y=z\overline{f(z)}/\|z\|^2$. 如果对于所有的 $x\in H$, $(x, y)=(x, y')$, 那么 $(x, y-y')=0$, 因而 $(y-y', y-y')=0$, 亦即 $y=y'$. 因为 $f(y)=\|y\|^2$, 并且 $|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|$, 我们有 $\|f\|=\|y\|$. 这就证明了定理.

习 题 3

1. 证明定理 10 中的元素 g 是唯一的.

2. 假设 M_1, M_2 是一内积空间的子空间, 证明 $M_1\perp M_2$ 当且仅当 $\|m_1+m_2\|^2=\|m_1\|^2+\|m_2\|^2$, 其中 $m_1\in M_1$, $m_2\in M_2$.

第七章　序列空间中的矩阵变换

§1　矩阵代数和线性变换

本章介绍一点矩阵变换和可和性理论．我们讨论的是无限的矩阵，不是有限的矩阵，由此产生的收敛性问题使本章内容构成分析的一部分而不是代数的一部分．

对于一般矩阵变换理论的兴趣在某种程度上是由可和性理论的特殊结果所引起，这些结果是由 Cesàro, Borel 以及其他人在上世纪和本世纪交替阶段得到的．然而，直到 1911 年才由有名的德国数学家 O. Toeplitz (1881—1940) 将线性空间理论的方法用于与序列空间的矩阵变换相关联的问题．Toeplitz 刻划了所有映射空间 c 到它自身　并保持每一个收敛序列的极限不变的无限矩阵 $A=(a_{nk})$ $n, k=1, 2, 3, \cdots$ 的特征．说得明白些，他给出关于 A 的充分必要条件使得

$$y_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, x_k$$

对每一个 n 收敛，且当 $n\to\infty$ 时，只要 $x_k\to l$ $(k\to\infty)$，它就趋于 l．这些有名的"Toeplitz 条件"下面即将给出——它们作为第四章 §3 Banach-Steinhaus 定理的应用时，可以很快地得出来．当然 Toeplitz 没有可能用这个定理，因为后者是本世纪二十年代的产物．他对定理的困难部分，用的是古典分析的方法，使用了有点复杂的归谬法论证．然而他的证明是十分有教益的，感兴趣的读者可查阅容易到手的 Hardy (1949) 的证明．

我们将看到，Banach-Steinhaus 定理及有关的结果特别适宜于处理矩阵变换及可求和性理论的许多问题．借助于这个定理，这理论的大部分对一般读者成为容易理解的．这样的读者既没有

时间也没有嗜好去采用通常"经典的"手段. 然而, 人们必须正确地对待事物, 因为虽然泛函分析方法常常使得证明的道路平坦, 但是我们必须记得许多实际结果原是用经典分析方法得到的. 不过, 关于这个问题, 或许应让读者——他可能涉猎不多——知道, 有所谓"硬"分析和"软"分析学派. 当泛函分析产生以后, 据说一些有名的经典分析学家. 如 G. H. Hardy (1877—1947), 把它说成是软分析. 如果他们竟然这样说过的话, 看起来他们的意思是说: 它大部涉及存在性而不是构造的证明. 例如, 在第四章中, Banach-Steinhaus 定理产生出其富氏级数在一点发散的连续函数的存在性. 由于证明的性质, 无法给出这个函数的显式. 从审美的观点看, 确实应该承认这是一种缺陷. 然而, 甚至在本书所介绍的这一点点的基础上, 可以希望读者看到泛函分析是值得从事的, 并且泛函分析就本身而论也是美丽的. 我的看法是没有硬分析或软分析——只有分析.

有人可能要问, 为何只研究由矩阵给出的这样特殊的变换——而不去研究一般的线性算子呢? 回答是这样, 在许多情形下, 从一个序列空间到另一个序列空间中的最一般的线性算子实际上是由矩阵给出的. 为弄清楚这点, 考虑零序列空间 c_0. 假定 $A=(a_{nk})$ $n, k=1, 2, \cdots$ 是一个无限矩阵, 且 $x=(x_k)\in c_0$. 使 A 作用于 x:

$$Ax=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

由通常矩阵相乘的方法(因为涉及的是无限矩阵, 在这里只是形式地应用), 得

$$Ax=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{pmatrix}.$$

因此，这就把序列 x 形式地映射成序列 Ax，它的 $(Ax)_n \equiv A_n(x)$

$$A_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k,$$

假定对每个 n 此级数收敛. 何时有 A: $c_0 \to c_0$？现在给出明晰的充分条件.

定理 1 设 $a_{nk} \to 0$ ($n\to\infty$, k 固定)，而且假定

$$M=\sup_n \sum |a_{nk}|<\infty$$

这里及以后对每一个 n 都是关于 k 求和. 那么 A 定义一个 c_0 到它自身中的有界线性算子，而且 $\|A\|=M$.

证明 设 $x \in c_0$, 则 $Ax \in c_0$, 即 $A_n(x) \to 0$ ($n\to\infty$). 这是因为级数 $\sum a_{nk}x_k$ 对每一个 n 是绝对收敛的. 而且，对任何 $m \geqslant 1$ 有

$$|A_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |a_{nk}x_k| + \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_{nk}x_k|$$
$$\leqslant \|x\| \sum_{k=1}^{m} |a_{nk}| + \max_{k\geqslant m+1} |x_k| \cdot M.$$

取 m 足够大，使 $\max\{|x_k| \mid k\geqslant m+1\}<\varepsilon$，且取 n 足够大，使 $\sum_1^m |a_{nk}|<\varepsilon$（这是可能的，因为 $a_{nk}\to 0$ ($n\to\infty$)，对固定的 k 成立).

因此，已证得 A: $c_0 \to c_0$. 很清楚，A 是线性的，例如，

$$A(\lambda x)=\left(\sum a_{nk}\lambda x_k\right)_{n\in N}=\lambda\left(\sum a_{nk}x_k\right)_{n\in N}=\lambda A(x).$$

最后，A 是有界的：因为对每个 $x\in c_0$ 时有

$$\|A(x)\|=\sup_n\left|\sum a_{nk}x_k\right| \leqslant \|x\| \sup_n \sum |a_{nk}|=M\|x\|.$$

由此得到 $\|A\|\leqslant M$，因此，还需论证 $\|A\|=M$，这样就可以完成证明. 现在，存在 $m=m(\varepsilon)$ 使 $\sum|a_{nk}|>M-\varepsilon/2$，且由于 $\sum|a_{mk}|<\infty$，存在 $p=p(\varepsilon)$ 使得

$$\sum_{k>p}|a_{mk}|<\varepsilon/2.$$

现在取
$$x_k=\begin{cases}\operatorname{sgn} a_{mk}, & 1\leqslant k\leqslant p,\\ 0, & k>p.\end{cases}$$

此时 $x\in c_0$，且有 $\|x\|=1$. 因此

$$\|A(x)\|/\|x\|=\sup_n|A_n(x)|\geqslant|A_m(x)|>M-\varepsilon.$$

由此得到 $M=\sup\{\|A(x)\|/\|x\|\,|\,x\neq\theta\}=\|A\|$.

定理 1 表明，某一类矩阵定义了 c_0 到它自身中的有界线性算子. 现在证明它的逆定理，即若 $A\in B(c_0, c_0)$，那么存在 (a_{nk}) 使

$$(Ax)_n=\sum a_{nk}x_k \quad 对每一个\ x\in c_0\ 成立, \tag{1}$$

这里的矩阵 (a_{nk}) 必须满足定理 1 的条件.

定理 2 设 A 是 c_0 到自身中的任何有界的线性算子，那么 A 决定一个矩阵 (a_{nk}) 使 (1) 成立，而且有

$$\|A\|=\sup_n\sum|a_{nk}|<\infty;\ a_{nk}\to 0\ \ (n\to\infty,\ k\ 固定).$$

证明 取 $e_1=(1, 0, 0, \cdots)$, $e_2=(0, 1, 0, 0, \cdots)$, $\cdots$, 因为 (e_k) 是 c_0 的基底，每一个 $x\in c_0$ 可写成 $x=\sum x_k e_k$. 由 A 的线性和连续性，

$$Ax=\sum x_k Ae_k=\sum x_k(a_k^{(n)})_{n\in N},$$

这里 Ae_k 是某个序列 $(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \cdots)\in c_0$, $k=1, 2, \cdots$. 由此，因为 $|x_n|\leqslant\|x\|$ 对每一个 n 以及 $x\in c_0$ 成立，得到

$$(Ax)_n=\sum a_k^{(n)}x_k \quad (n=1, 2, \cdots),$$

用另外的记号，可写成

$$A_n(x)=\sum a_{nk}x_k. \tag{2}$$

这就证明了(1). 由于假设了对 $x\in c_0$ 总有 $Ax\in c_0$, 推得 $Ae_k\in c_0$, $k=1, 2, \cdots$, 由此得到 $a_{nk}\to 0$ $(n\to\infty)$, $k=1,2,\cdots$, 剩下的就是要证明 $\|A\|=\sup_n\sum|a_{nk}|$. 根据定理 1 只要证明存在 H, 使 $\sum|a_{nk}|\leqslant H$ 对所有 n 成立. 现在对每一个 n

$$|A_n(x)|\leqslant\|A(x)\|\leqslant\|A\|\|x\|,$$

因此 A_n 是 c_0 上的有界(而且显然是线性的)泛函. 于是有序列 $(A_n)\in c_0^*$, 使得 $\lim_n A_n(x)=0$ 在 c_0 上成立. 按照 Banach-Steinhaus 定理得到范数序列 $(\|A_n\|)$ 是有界的，即

$$\|A_n\| \leqslant H$$

对所有 n 及某个常数 H 成立. 由第四章定理 8 的证明(也可参看对偶空间表), (2) 中给出的 A_n 的范数是

$$\|A_n\| = \sum |a_{nk}|.$$

因此, 证明了 $M = \sup_n \sum |a_{nk}| < \infty$, 由定理 1 的证明得到 $\|A\| = M$.

用类似于定理 2 的方法, 能证明对某些序列空间 X, Y, 每一个 $A \in B(X, Y)$ 可用一个矩阵给出. 现在列出这些空间中的一些: (c_0, c_0), (c_0, c), (c_0, l_1), (c, c_0), (c, c), (c, l_1), (l_p, c_0), (l_p, c), (l_p, l_1), (l_p, l_s), 这里 $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant s < \infty$. 一个值得注意的例外是 l_∞, 它不能出现在括号内第一个位置, 这是由于并不是 l_∞^* 的每一个元素能表示成 $\sum a_k x_k$ 的形式. 因为 (e_k) 不是 c 的基底, 要注意, 描述 c 的映射时, 需要稍加小心.

虽然 $A \in B(l_2, l_2)$——举例说——能表示成矩阵, 但至今还不知道为了保证 $A \in B(l_2, l_2)$, 关于 $A = (a_{nk})$ 应有什么样的明晰的充分必要条件. 充分条件已由 Schur 给出 (见 Taylor, 1958). Taylor 的证明依赖于对称算子和特征值的知识. 以后将给出 Schur 定理的推广, 它的证明是完全初等的, 只用到 Hölder 不等式.

根据上面说的话, 今后只考虑序列空间 X 的矩阵变换

$$A_n(x) = \sum a_{nk} x_k.$$

用 (X, Y) 表示映射 X 到 Y 中的所有的矩阵 A 的集合. 用 $(X, Y; P)$ 表示保持极限或可和性不变的 (X, Y) 的子集. 例如, $A \in (c, c; p)$ 表示对每一个 n, 当 $x \in c$ 时, $A_n(x)$ 存在, 且只要 $x_k \to l$ $(k \to \infty)$, 就有 $A_n(x) \to l$ $(n \to \infty)$.

现在给出一些基本的结果.

定理 3 (Silverman–Toeplitz) $A \in (c, c; p)$ 当且仅当

(i) $\sup_n \sum |a_{nk}| < \infty$;

(ii) $a_{nk} \to 0$ ($n \to \infty$, k 固定);

(iii) $\sum a_{nk} \to 1$ ($n \to \infty$).

证明 Silverman 证明了条件的充分性，这是容易证的."难"的部分是(i)的必要性，这是 Toeplitz 的贡献. 今后，满足(i)—(iii)的矩阵称为 Toeplitz (有些人称它为正则的——一个有些用得过多的术语)矩阵.

为了证明(i)—(iii)是充分的，记

$$\sum a_{nk} x_k = \sum a_{nk}(x_k - l) + l \sum a_{nk}, \tag{3}$$

由(iii)，当 $n \to \infty$ 时，(3)的第二项趋于 l. 第一项趋于 0. 要看清这一点，利用(i)和(ii)，并在定理 1 中用 $x_k - l$ 代替 x_k 即可.

(ii)和(iii)的必要性是容易的——对(ii)，只要令 $x = e_k \in c_0$ $k=1, 2, \cdots$，对(iii)，只要令 $x = e = (1, 1, 1, \cdots)$. (i)的必要性实质上在定理 2 的证明中已论证过. 为了完备起见，我们指出论据的大概. 假设对每一个 n，$A_n(x) = \sum a_{nk} x_k$ 当 $x_k \to l$ 时总存在并趋于 l. 由对于每一个 n 及每一个 $x \in c$ 的存在性就知道 $\sum |a_{nk}| < \infty$ 对每一个 n 成立，而且

$$\|A_n\| = \sum |a_{nk}|. \tag{4}$$

这可由 Banach-Steinhaus 定理得到，或由如下初等的论证得到：因为 n 是固定的，从符号中除去 n，而且假定 $\sum a_k x_k$ 对所有 $x \in c$ 收敛. 于是 $\sum |a_k| < \infty$; 否则 $\sum |a_k| = \infty$，因此存在整数序列 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 使

$$\Sigma_i = \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} |a_k| > i.$$

定义 $x \in c_0$ 如下：

$$x_k = \begin{cases} (\operatorname{sgn} a_k)/i, & n_i < k \leqslant n_{i+1}, \\ 0, & 1 \leqslant k \leqslant n_1. \end{cases}$$

于是，$\sum a_k x_k=\sum_1+\sum_2/2+\sum_3/3+\cdots>1+1+\cdots$，所以 $\sum a_k x_k$ 发散，与假设矛盾．因此，$\sum|a_k|<\infty$，而由于在 c 上 $\sum|a_k x_k|\leqslant\sum|a_k|\cdot\|x\|$，所以 $\sum a_k x_k$ 定义 c^* 的一个元素．还有，这个泛函的范数是 $\sum|a_k|$（见对偶空间表）．于是证明了(4)．最后，由假定有 $\limsup_n|A_n(x)|<\infty$ 在 c 上成立，从 Banach-Steinhaus 定理得到

$$\sup_n\sum|a_{nk}|=\sup_n\|A_n\|<\infty,$$

这就是 (i)．

Toeplitz 定理有一个有关(c, c)的小的推广．

定理 4（Kojima-Schur） $A\in(c, c)$ 当且仅当

(i) $\sup_n\sum|a_{nk}|<\infty$;

(ii) 对每一个 p，$\lim_n\sum_{k=p}^{\infty}a_{nk}=a_p$.

证明 (i)的必要性就象在定理 3 中一样证明．要得出(ii)的必要性只须取 $x=(0, 0, \cdots, 0, 1, 1, 1, \cdots)\in c$，第一个 1 在第 p 个位置．

现在来证充分性，当 $x_k\to l$ 时，我们写

$$\sum a_{nk}x_k=\sum a_{nk}(x_k-l)+l\sum a_{nk}=s_n+t_n.$$

由(ii)知道，$t_n\to la_1$，现在证明 $s_n\to\sum b_k(x_k-l)$，其中 $b_k=\lim_n a_{nk}=a_k-a_{k+1}$ 对每一个 k 成立．显然，

$$\sum|b_k|\leqslant\sup_n\sum|a_{nk}|<\infty,$$

因此，$s_n-\sum b_k(x_k-l)$ 等于

$$v_n=\sum(a_{nk}-b_k)(x_k-l).$$

在定理 1 的论证中，用 x_k-l 代替 x_k，$a_{nk}-b_k$ 代替 a_{nk}，可得 $v_n\to0$ $(n\to\infty)$．因此，有

$$\sum a_{nk}x_k\to l\cdot\lim_n\sum a_{nk}+\sum(\lim_n a_{nk})(x_k-l) \tag{5}$$

当 $x_k\to l$ 时成立．

与(5)相关联的，有一个十分重要的事物：

保守 (Conservative) 矩阵的特征 设 $A\in(c, c)$，则 A 称为保守(保持收敛性的)矩阵．而

$$\chi(A)=\lim_n\sum a_{nk}-\sum(\lim_n a_{nk})$$

称为 A 的特征．数 $\lim_n a_{nk}$，$k=1, 2, \cdots$ 和 $\lim_n\sum a_{nk}$ 都称为 A 的特征数．

由定理 3 知，Toeplitz 矩阵的特征是等于 1．一般，我们定义

同正则 (co-regular) 矩阵和同零 (co-null) 矩阵 设 $A\in(c, c)$，则当且仅当 $\chi(A)\neq 0$ 时称为同正则的，否则称为同零的矩阵．

这样，Toeplitz 矩阵组成同正则矩阵的子集．后者又是保守矩阵的子集．在习题中将可找到特征的一些性质．在本章的后面也将用到它．

下面，描述 (l_1, l_p)，$1\leqslant p\leqslant\infty$ 的元素的特征．$p=1$ 的情形是由 K. Knopp 和 G. G. Lorentz 在 1949 年证明的．

定理 5 $A\in(l_1, l_p)$ 当且仅当

(a) $M=\sup_k\sum_n|a_{nk}|^p<\infty$ ($1\leqslant p<\infty$ 的情形)；

(b) $\sup_{n,k}|a_{nk}|<\infty$ ($p=\infty$ 的情形)．

证明 我们证明(a)，(b)的证明与此类似，留作练习．充分性正好是 Minkowski 不等式的应用．因为，若 $x\in l_1$，我们希望证明 $(A_n(x))\in l_p$：

$$\left(\sum_n\left|\sum_k a_{nk}x_k\right|^p\right)^{1/p}\leqslant\sum_k\left(\sum_n|a_{nk}x_k|^p\right)^{1/p}$$
$$=\sum_k|x_k|\left(\sum_n|a_{nk}|^p\right)^{1/p}\leqslant\|x\|M^{1/p}<\infty.$$

对 n 和 k 求和次序的交换由绝对收敛性所保证．这是充分性的论述．

现在假设 $A\in(l_1, l_p)$，因此

$$\sum_i|A_i(x)|^p<\infty \text{ 在 } l_1 \text{ 上成立,}$$

其中$A_i(x)=\sum_k a_{ik}x_k$. 由于对每个 i, 以及对任何 $x\in l_1$, $\sum_k a_{ik}x_k$ 收敛，由 Banach–Steinhaus 定理，或用一个简单的论述(象上面定理 3 中推导(4)一样)， 得到 $\sup_k|a_{ik}|<\infty$(对每一个 i). 因此，对每一个 i, A_i 决定 l_1^* 的一个元素. 现在，定义

$$q_n(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}|A_i(x)|^p\right)^{1/p}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

由 Minkowski 不等式知道，每个 q_n 是次可加的. 于是，由 $q_n(\lambda x)=|\lambda|q_n(x)$, q_n 是 l_1 上的半范数. 还有, A_i 是 l_1 上的一个有界线性泛函，可知每一个 q_n 在 l_1 上是有界的. 因此，在 l_1 上连续半范数的序列(q_n)使

$$\sup_n q_n(x)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|A_i(x)|^p\right)^{1/p}<\infty$$

对每个$x\in l_1$ 成立. 应用第四章定理 11，得到一个常数 H，使

$$\sum_{i=1}^{\infty}|A_i(x)|^p\leqslant H^p\|x\|^p \text{ 在 } l_1 \text{ 上成立.}$$

令 $x=e_k$, $k=1,\ 2,\ \cdots$，就得到(a).

下面的定理是 Schur 在 1921 年证明的，它与前面的定理的区别不仅在于对矩阵的条件的性质相当不同，还在于它的证明是“经典的”. 看起来这定理还没有泛函分析的证明——肯定地说，虽然 Banach–Steinhaus 定理在许多方面如此有用，但用来证明此定理看来是不适宜的.

为了有助于 Schur 定理的证明，给出一个简单的引理.

引理 若对每一个 n, $\sum|b_{nk}|<\infty$，而且 $\sum|b_{nk}|\to 0$ $(n\to\infty)$，那么 $\sum|b_{nk}|$ 对 n 一致收敛.

证明 由 $\sum|b_{nk}|\to 0$ $(n\to\infty)$，必有 $\sum\limits_{k<1}|b_{nk}|<\varepsilon$, $n>N(\varepsilon)$.

由于 $\sum|b_{nk}|<\infty, 1\leqslant n\leqslant N(\varepsilon)$，存在 $m=m(n,\ \varepsilon)$使 $\sum\limits_{k>m}|b_{nk}|<\varepsilon$. 因此，存在 $M=M(\varepsilon)\geqslant 1$，使 $\sum\limits_{k>M}|b_{nk}|<\varepsilon$ 对所有的 n 成立. 这就是说 $\sum|b_{nk}|$ 对 n 一致收敛.

注意，引理的结果当 $|b_{nk}|$ 用非负的 b_{nk} 代替时也成立.

定理 6 (Schur) $A\in(l_\infty, c)$ 的充要条件为：(i) $\sum_k|a_{nk}|$ 对 n 一致收敛；(ii) $\lim_n a_{nk}$ (对固定 k) 存在.

证明 充分性是容易证明的——由 $x\in l_\infty$ 及(i)必有 $\sum a_{nk}x_k$ 对 n 是绝对一致收敛的. 由此，$\lim_n\sum a_{nk}x_k=\sum a_k x_k$ 存在，这里 $a_k=\lim_n a_{nk}$.

取 $x=e_k\in l_\infty$, $k=1, 2, \cdots$, 可知(ii)是必要的. 现在考虑(i)的必要性. 由于 $\sum a_{nk}x_k$ 对任何 $x\in l_\infty$ 收敛，因此对任何 $x\in c$ 它收敛. 由 Kojima-Schur 定理，必有 $\sup_n\sum|a_{nk}|<\infty$. 记 $b_{nk}=a_{nk}-a_k$, $a_k=\lim_n a_{nk}$. 由于 $\sum|a_k|<\infty$，我们有 $(\sum b_{nk}x_k)$ 对任何 $x\in l_\infty$ 收敛. 我们将证明由此必有

$$\sum|b_{nk}|\to 0\quad(n\to\infty).\tag{6}$$

于是，由上面的引理知 $\sum|b_{nk}|$ 对 n 一致收敛. 由此 $\sum|a_{nk}|=\sum|b_{nk}+a_k|$ 对 n 一致收敛，这就是(i).

这样，必须证明(6)，我们用归谬法来做. 假定 $\sum|b_{nk}|\not\to 0$ $(n\to\infty)$，由此当 m 取正整数的某个子序列时，$\sum|b_{mk}|\to c>0$ (因为可设 $\limsup_n\sum|b_{nk}|=c$). 从而也有 $b_{mk}\to 0$ $(m\to\infty$, 对每个 $k)$ 成立. 因此，我们可以决定 $m(1)$ 使

$$\left|\sum|b_{m(1),k}|-c\right|<c/10\quad 和\quad |b_{m(1),1}|<c/10.$$

由于 $\sum|b_{m(1),k}|<\infty$，可选取 $k(2)>1$，使

$$\sum_{k=k(2)+1}^{\infty}|b_{m(1),k}|<c/10.$$

由此得

$$\left|\sum_{k=2}^{k(2)}|b_{m(1),k}|-c\right|<3c/10.$$

用缩写记号，记

$$\sum_{k=p}^{q}|b_{mk}|=B(m, p, q).$$

现在，选取 $m(2)>m(1)$ 使 $|B(m(2), 1, \infty)-c|<c/10$，且使

$B(m(2),\ 1,\ k(2))<c/10$. 然后，选取 $k(3)>k(2)$，使

$$B(m(2),\ k(3)+1,\ \infty)<c/10.$$

由此得 $|B(m(2),\ k(2)+1,\ k(3))-c|<3c/10$.

继续用此方法，可找到 $m(1)<m(2)<\cdots,\ 1=k(1)<k(2)<\cdots$ 使

$$\left.\begin{array}{l} B(m(r),\ 1,\ k(r))<c/10, \\ B(m(r),\ k(r+1)+1,\ \infty)<c/10, \\ |B(m(r),\ k(r)+1,\ k(r+1))-c|<3c/10. \end{array}\right\} \tag{7}$$

我们定义 $x\in l_\infty(\|x\|=1)$：

$$x_k=0 \quad (k=1)$$

$$x_k=(-1)^r \operatorname{sgn} b_{m(r),k}(k(r)<k\leqslant k(r+1)) \quad (r=1,\ 2,\ \cdots).$$

然后，把 $\sum b_{m(r),k}x_k$ 写成 $\sum_1+\sum_2+\sum_3$，这里 $\sum_1$ 是对 $1\leqslant k\leqslant k(r)$ 取和；$\sum_2$ 是对 $k(r)<k\leqslant k(r+1)$ 取和；$\sum_3$ 是对 $k>k(r+1)$ 取和. 由(7)和 x 的定义立即可得

$$\left|\sum b_{m(r),k}x_k-(-1)^r c\right|<c/2.$$

因此，很清楚，序列 $(B_n(x))=(\sum b_{nk}x_k)$ 不是一个 Cauchy 序列，故不是收敛序列. 因此，如果(6)不成立，那么 $(B_n(x))$ 不是对所有 $x\in l_\infty$ 都成为收敛序列，与假设矛盾. 这就完成了 Schur 定理的证明.

推论 在 l_1 中，序列的强收敛和弱收敛是一致的.

证明 只需证明由弱收敛必可推出强收敛. 设在 l_1 中 $y^{(n)}\to y$ (弱)，即 $f(y^{(n)}-y)\to 0\ (n\to\infty)$ 对每一个 $f\in l_1^*$ 成立. 现在 $f\in l_1^*$，当且仅当存在 $x\in l_\infty$ 使 $f(z)=\sum z_k x_k$ 对所有 $z\in l_1$ 成立. 因此

$$f(y^{(n)}-y)=\sum(y_k^{(n)}-y_k)x_k\equiv\sum b_{nk}x_k\to 0 \quad (n\to\infty)$$

对每一个 $x\in l_\infty$ 成立. 由 Schur 定理的证明得到

$$\sum|y_k^{(n)}-y_k|\to 0 \quad (n\to\infty),$$

即

$$\|y^{(n)}-y\|\to 0 \quad (n\to\infty),$$

因此，在 l_1 中 $y^{(n)}\to y$（强）.

下一个矩阵变换定理关系到强 Cesàro 可和序列空间 w_p，即 w_p 是所有这样序列 x 的集合：存在一个数 l，使

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-l|^p\to 0\quad(n\to\infty)$$

成立．这里 p 是一个固定的正数．当数 l 存在时，它是唯一的．对一定的 p，空间 w_p 在遍历性理论（见 Halmos, 1956）和 Fourier 级数理论（见 Zygmund, 1955）上是有趣的．对 w_p 的自然范数和 p–范数在第四章习题 4 第 12 题中定义过，而且 w_p 在这些范数下是完备的.

我们的目的是对映照 w_p 到 c 的无限矩阵 A 给出充分必要条件．由于技巧上的原因，我们将取 w_p 的范数不同于上面提到的范数．然而，这些新的范数与老的范数中每一个是等价的．定义

$$\|x\|=\sup_r(2^{-r}\textstyle\sum_r|x_k|^p)^{1/p}\quad(p\geqslant 1),$$

$$\|x\|=\sup_r(2^{-r}\textstyle\sum_r|x_k|^p)\quad(0<p<1),$$

其中 $r\geqslant 0$，而且 $\sum_r$ 表示对 $2^r\leqslant k\leqslant 2^{r+1}$ 求和．为节省起见，不标明 $\|x\|$ 对 p 的依赖性，但应当记在心里．如果记

$$\|x\|^1=\sup\Big(n^{-1}\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\Big)^{1/p}\quad(p\geqslant 1),$$

$$\|x\|^1=\sup n^{-1}\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\quad(0<p<1),$$

那么容易验证对任何 $p>0$，

$$2^{-1}\|x\|\leqslant\|x\|^1\leqslant 2\|x\|,$$

因此，$\|x\|$ 和 $\|x\|^1$ 是等价的．例如，因为 w_p 依 $\|x\|^1$ 是完备的，它依 $\|x\|$ 也是完备的．于是，在 $p\geqslant 1$ 的情形，$(w_p,\ \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间．而在 $0<p<1$ 的情形，它是完备的 p–范数空间．在记号方面，对任何矩阵 $A=(a_{nk})$ 和 $1/p+1/q=1,\ p\geqslant 1$，记

$$A_r^p(n)=(\textstyle\sum_r|a_{nk}|^q)^{1/q},\tag{8}$$

其中对每个 n, 和式是关于满足 $2^r \leqslant k < 2^{r+1}$ 的 k 取的. 在(8)中 $p=1$ 的情形,理解为

$$A_r^1(n) = \max_r |a_{nk}|,$$

其中对于每个 n, 最大值是对满足

$$2^r \leqslant k < 2^{r+1}$$

的 k 取的.

定理 7 (a) 设 $0<p<1$,那么 $A \in (w_p, c)$的充分必要条件是:

(i) $a_{nk} \to a_k \quad (n \to \infty,\ k$ 固定),

(ii) $M(A) = \sup_n \sum_{r=0}^{\infty} 2^{r/p} A_r^{\prime}(n) < \infty$.

(b) 设 $p \geqslant 1$, 则 $A \in (w_p, c)$的充分必要条件是:

(i) 与(a)中(i)同样,

(ii) $\sup_n \sum_{r=0}^{\infty} 2^{r/p} A_r^p(n) < \infty$,

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \to a \quad (n \to \infty)$.

证明 只证明(a). (b)可用类似的方法证明. 首先考虑充分性. 当(ii)成立时, 由 $A_n(x) = \sum a_{nk} x_k$ 定义的级数对每一个 n 是绝对收敛的. 因为,用不等式

$$\left|\sum b_k\right|^p \leqslant \sum |b_k|^p \quad (0<p<1)$$

(见第一章 § 4)有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \left| a_{nk} x_k \right| &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_r |a_{nk} x_k| \\ &\leqslant \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_r |a_{nk} x_k|^p \right)^{1/p} \\ &\leqslant \sum_{r=0}^{\infty} A_r^1(n) \cdot 2^{r/p} \|x\|^{1/p} \\ &\leqslant M(A) \|x\|^{1/p} < \infty,\end{aligned}$$

对任何 $x \in w_p$ 成立. 现在将证明当(ii)成立时,必有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| \text{ 对 } n \text{ 是一致收敛的.} \tag{9}$$

于是由(9)和(i)一起,必可推出

$$\lim_n \sum a_{nk}=\sum a_k. \tag{10}$$

为了证明(9),记 $1/p+1/q=1$, $0<p<1$. 于是对任何正整数 s 和任何 $m\geqslant 2^s$, 对所有的 n 有

$$\sum_{k=m}^{\infty}|a_{nk}|\leqslant\sum_{r=s}^{\infty}\sum_r|a_{nk}|\leqslant\sum_{r=s}^{\infty}A_r^{\frac{1}{r}}(n)2^r\leqslant M(A)2^{s/q}.$$

因为 $q<0$, 由此得(9)成立.

现在取 $x\in w_p$ 而且假设

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n}|x_k-l|^p\to 0 \quad (n\to\infty).$$

记

$$\sum a_{nk}x_k=\sum a_k x_k+l\sum(a_{nk}-a_k)+\sum(a_{nk}-a_k)(x_k-l), \tag{11}$$

并且注意到由(i)和(ii)必有

$$\sum_{r=0}^{\infty}2^{r/p}\max_r|a_k|\leqslant M(A).$$

因此 $\sum|a_k x_k|<\infty$ 且(11)中最后的和式当 $n\to\infty$ 时有极限 0. 因此, 由(10), 当 $n\to\infty$ 时, 有 $\sum a_{nk}x_k\to\sum a_k x_k$ 对 w_p 中的每一个 x 都成立. 这就证明了当 $0<p<1$ 时的充分性.

(i)的必要性是易见的. 因此, 来证明(ii)的必要性. 假设对每个 $n\geqslant 1$ 及任何 $x\in w_p$, $A_n(x)=\sum a_{nk}x_k$ 收敛. 那么, 对每个 n 和每个 $r\geqslant 0$, 泛函 $f_{rn}(x)=\sum_r a_{nk}x_k$ 是在对偶空间 w_p^* 中; 它们明显是线性的, 又是连续的, 因为

$$|f_{rn}(x)|\leqslant A_r^{\frac{1}{r}}(n)2^{r/p}\|x\|^{1/p}.$$

从第四章§3定理11的推论得到, 对每一个 n, $\lim_s\sum_{r=0}^{s}f_{rn}(x)=A_n(x)$是在 w_p^* 中, 由此

$$|A_n(x)|<\|A_n\|\|x\|^{1/p}. \tag{12}$$

对每个 n，取任何整数 $s>0$，而且定义 $x\in w_p$:

$$\text{对 } k\geqslant 2^{s+1}, \qquad x_k=0,$$

$$\text{对 } 0\leqslant r\leqslant s, \qquad x_{N(r)}=2^{r/p}\operatorname{sgn} a_{n,N(r)},$$

$$x_k=0 \quad (k\neq N(r)).$$

其中 $N(r)$ 使 $|a_{n,N(r)}|=\max_r|a_{nk}|$. 由(12)得

$$\sum_{r=0}^{s}2^{r/p}A_r^1(n)\leqslant\|A_n\|,$$

因此，对每个 n

$$\sum_{r=0}^{\infty}2^{r/p}A_r^1(n)\leqslant\|A_n\|<\infty. \tag{13}$$

现在，用在充分性中证明过级数 $A_n(x)$ 是绝对收敛的论证，可得

$$|A_n(x)|\leqslant\sum_{r=0}^{\infty}2^{r/p}A_r^1(n)\|x\|^{1/p},$$

因此，

$$\|A_n\|\leqslant\sum_{r=0}^{\infty}2^{r/p}A_r^1(n). \tag{14}$$

(13)和(14)一起，给出

$$\|A_n\|=\sum_{r=0}^{\infty}2^{r/p}A_r^1(n).$$

最后，根据第四章§3定理11，由 $\lim_n A_n(x)$ 在 w_p 上存在可知

$$\sup_n\|A_n\|=\sup_n\sum_{r=0}^{\infty}2^{r/p}A_r^1(n)<\infty,$$

这就是(ii). (a)证完.

下面矩阵变换的结果是有关$(\gamma, c; P)$这一类(class)的，这时我们希望得到关于矩阵 B 的充分必要条件，以保证当 $\sum a_k=s$ 时，总有 $\sum b_{nk}\to s$.

定理8 $B\in(\gamma, c; P)$ 的充分必要条件是:

(i) $b_{nk}\to 1\,(n\to\infty,\ k$ 固定); (ii) $\sup_n\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta b_{nk}|<\infty$，其中 $\Delta b_{nk}=b_{nk}-b_{n,k+1}$.

证明 由 Abell 部分和，对每一个 n，当(ii)成立且 $\sum a_k=s$ 时，

$$\sum b_{nk}a_k=s\,b_{n1}+\sum(s_k-s)\Delta b_{nk},$$

其中 $s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$. 由(i)和(ii)，很清楚，$\Delta(b_{nk})\in(c_0,\ c_0)$，由此 $\sum b_{nk}a_k\to s\ (n\to\infty)$.

(i)的必要性是容易的. 要证明(ii)的必要性，可以归结于 Toeplitz 定理的必要性，这留给读者处理. $(\gamma,\ c;\ P)$中的矩阵 B 常称为 γ-矩阵.

作为关于矩阵变换的最后结果，我们给出 Schur 定理的推广的简单证明. Schur 定理是：若 $A\in(l_\infty,\ l_\infty)\cap(l_1,\ l_1)$，则 $A\in(l_2,l_2)$.

定理 9 如果 $1<p<\infty$，且设 $A\in(l_\infty,\ l_\infty)\cap(l_1,\ l_1)$. 那么 $A\in(l_p,\ l_p)$.

证明 用定理 1—4 的方法容易证明：当且仅当 $\|A\|_\infty=\sup_n\sum\limits_k|a_{nk}|<\infty$ 时，$A\in(l_\infty,\ l_\infty)$. 还有，当且仅当 $\|A\|_1=\sup_k\sum_n|a_{nk}|<\infty$ 时，$A\in(l_1,\ l_1)$. 现在

$$\left|\sum_k a_{nk}x_k\right|\leqslant\sum_k|a_{nk}|^{1/p}|a_{nk}|^{1/q}|x_k|,$$

其中 $1/p+1/q=1$. 由 Hölder 不等式，

$$\sum_k|a_{nk}|^{1/p}|a_{nk}|^{1/q}|x_k|\leqslant\left(\sum_k|a_{nk}||x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_k|a_{nk}|\right)^{1/q},$$

所以
$$\left|\sum_k a_{nk}x_k\right|^p\leqslant\left(\sum_k|a_{nk}||x_k|^p\right)\left(\sum_k|a_{nk}|\right)^{p/q}.$$

因此
$$\|Ax\|^p=\sum_n\left|\sum_k a_{nk}x_k\right|^p\leqslant\sum_n\sum_k|a_{nk}||x_k|^p\|A\|_\infty^{p/q}$$
$$\leqslant\|A\|_\infty^{p/q}\sum_k|x_k|^p\sum_n|a_{nk}|\leqslant\|A\|_\infty^{p/q}\|x\|^p\|A\|_1,$$

所以 $\|Ax\|\leqslant\|A\|_\infty^{1/q}\|A\|_1^{1/p}\|x\|$ 对任何 $x\in l_p$ 成立.

特殊矩阵 现在给出一些特殊的 Toeplitz 矩阵和 γ-矩阵的例子，它们分别出于特定的作者. 这些矩阵已经广泛地应用在可和性理论中，我们将在 §3 中加以检验. 在进一步讨论前，我们指出，在大部分证明中，可用 $a_k(t)$代替 a_{nk} 并且让 t 连续地趋于∞.

例如，若

$$a_k(t)=e^{-t}t^k/k! \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ t>0),$$

于是 $a_k(t)\to 0$ ($t\to\infty$, k 固定)而且

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k(t)|=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(t)=1.$$

由此 $\sup_t\sum|a_k(t)|<\infty$. 虽然 $A=(a_k(t))$ 实际上是一个"半连续"矩阵，我们仍然称它为一个 Toeplitz 矩阵. 它的基本性质是它映照收敛序列到收敛函数，保持极限不变. 事实上，上面的矩阵 A 称为 Borel 矩阵——依照法国数学家 Borel(1871—1956).

Borel 矩阵 由 $a_k(t)=e^{-t}t^k/k!$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ t>0$)定义的 Toeplitz 矩阵.

算术平均 由

$$a_{nk}=1/(n+1) \quad (0\leqslant k\leqslant n), \qquad a_{nk}=0 \quad (k>n)$$

定义的 Toeplitz 矩阵. (Cauchy 已经知道，由 $x_k\to x$ 必有 $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}x_k\to x$.)

Cesàro 平均 对每一个 $r>-1$,

$$a_{nk}=A_{n-k}^{r-1}/A_n^r \quad (0\leqslant k\leqslant n), \qquad a_{nk}=0 \quad (k>n)$$

定义的 $(C,\ r)$ 矩阵，其中当 $n>1$ 时，$A_n^r=(r+1)(r+2)\cdots(r+n)/n!$，当 $n=0$ 时，$A_0^r=1$.

当 $r\geqslant 0$ 时，$A_n^{r-1}\geqslant 0$，利用事实

$$(1-z)^{-r-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^r z^n(|z|<1)$$

很容易证明 $$\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{s}A_k^{r}=A_n^{s+r+1},$$

由此得到 $\sum|a_{nk}|=\sum a_{nk}=1$ 对每一个 n 成立. 现在，由初等分析知道

$$\frac{A_n^r}{n^r}\to\frac{1}{\Gamma(r+1)} \quad (n\to\infty) \tag{15}$$

这里 $\Gamma(x)$ 为 Γ 函数. 由此得到对固定的 k, $a_{nk}\to 0$ $(n\to\infty)$. 不熟悉(15)的读者可参看习题 1 第 11 题.

这样, 已证明了称为 r 阶 Cesàro 矩阵 (C, r) 的每一个矩阵, 当 $r\geqslant 0$ 时是一个 Toeplitz 矩阵. 当 $-1<r<0$ 时, (C, r) 不是 Toeplitz 矩阵, 当然, 它的性质还可以考虑. $r=0$ 的情形给出单位矩阵, 而 $r=1$ 的情形给出算术平均.

Euler-Knopp 矩阵 定义

$$a_{nk}=\binom{n}{k}r^k(1-r)^{n-k}\quad (0\leqslant k\leqslant n),\qquad a_{nk}=0\quad (k>n),$$

这里 $\binom{n}{k}=n!/k!(n-k)!$. 那么当 $0<r<1$ 时, A 是 Toeplitz 矩阵. 用 (E, r) 表示 r 阶 Euler-Knopp 矩阵.

Abel 矩阵 这是由 $b_k(x)=x^k$, $0<x<1$, $k=0, 1, \cdots$ 定义的 γ-矩阵. 在这一情形, 我们对 $\sum b_k(x)a_k$ 取 $x\to 1^-$ 时的极限. Abel 极限定理(第一章习题 3)表明, B 是一个 γ-矩阵. 还有, 在 $x\to 1^-$ 的条件下作相应的修改后, 可应用定理 8:

$$x^k\to 1(x\to 1^-, k\text{ 固定});\quad \sup_{0<x<1}\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta x^k|=1.$$

Riesz 平均 这些矩阵由 Marcel Riesz (F. Riesz 的兄弟)引进, 并且在 Dirichlet 级数理论中是重要的 (见 G. H. Hardy 和 M. Riesz, 1915).

设 $0\leqslant\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n\to\infty$, $\mu>0$ 且定义

$$\begin{aligned} b_k(t)&=(1-\lambda_k/t)^{\mu} && \text{对 } \lambda_k<t,\\ &=0 && \text{对 } \lambda_k>t. \end{aligned}$$

于是, 容易验证 B 是一个 γ-矩阵(这里让 $t\to\infty$). 用 (R, λ, μ) 表示 $\lambda=(\lambda_n)$ 型和 μ 阶的 Riesz 平均. 结果发现对 $\lambda_n=n$, 矩阵 (R, n, μ) "等价"于 Cesàro 矩阵 (C, μ), 即当且仅当 x 是 (C, μ) 可和且其和

为 l 时, x 是 (R, n, μ) 可和且其和为 l (见 § 3 开首).

还有许多另外的特殊矩阵在分析上有用处. 只略举几种: 即与 Hausdoff, Hölder, Ingham, Lambert, Mittag-Leffler, Nörlund, Riemann 和 de la Vallee-Poussin 等名字相联系的矩阵. 对这些矩阵的特殊性质, 读者可参看 Hardy 的 "Divergent Series(发散级数)".

习 题 1

1. 设 X 是一个复 Banach 空间, 且 $c(X)$ 是所有 $x_k \in X$ 的收敛序列 $x=(x_k)$ 的集合. 定义 $\lambda x+\mu y=(\lambda x_k+\mu y_k)$, $\|x\|=\sup_n\|x_n\|$, 证明: $c(X)$ 是一个 Banach 空间.

假设复数矩阵 $A=(a_{nk})$ 使 $(\sum_k a_{nk} x_k)_{n\in N}$ 对任何 $x\in c(X)$ 收敛, 证明 $A\in(c, c)$, 即 A 是保守的.

2. 证明 $(c, c; P)\subset(l_\infty, l_\infty)$, $(l_\infty, c)\subset(c, c)$, $(c, c; P)\subset(c_0, c_0)$, 并证明: $(c, c; P)\cap(l_\infty, c)=\emptyset$. 什么是 (c_0, c_0) 和 (c, c) 之间的关系?

3. 证明: 当且仅当 $a=(a_n)\in BV\cap c_0$ 时, 对任何且有有界部分和的 $\sum x_n$, $\sum a_n x_n$ 收敛(用 Schur 定理).

4. 证明: 当且仅当 $\sum|a_{nk}|\to 0$ $(n\to\infty)$ 时, $A\in(l_\infty, c_0)$.

5. 设 A 是一个非负的 Toeplitz 矩阵, 即 $a_{nk}\geqslant 0$ 对所有 n, k 成立. 若 $A_n(x)=\sum a_{nk}x_k$, 其中 x_k 是实的, 证明

$$\liminf x_n\leqslant\liminf A_n(x)\leqslant\limsup A_n(x)\leqslant\limsup x_n.$$

由此证明由 $x_n\to\infty$ 必有 $A_n(x)\to\infty$. 证明对正保守矩阵, 由 $x_n\to\infty$ 不一定能推出 $A_n(x)\to\infty$.

6. 一个矩阵 A, 若对所有有限的或无限的 s, 由 $x_n\to s$ 必有 $A_n(x)\to s$ 时, 就称为完全正则的(totally regular). 假设 $A_n(x)=2x_n-x_{n+1}$, 证明 A 是 Toeplitz 矩阵, 但不是完全正则的. 证明矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} & \cdots \\ 0 & 1 & -2^{-2} & 2^{-3} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -2^{-3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

是完全正则的.

7. 证明 $A\in(l_1, l_1; P)$，这里对 $1\leqslant k\leqslant n$, $a_{nk}=k/n(n+1)$；对 $k>n$, $a_{nk}=0$.

8. 证明(l_∞, c)中每一个矩阵是同零的.

9. 证明由 $A, B\in(c, c)$，必有 $A+B$, $AB\in(c, c)$，这里 AB 表示通常的矩阵乘积:

$$(AB)_{nk}=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}b_{ik}.$$

并证明对 $A, B\in(c, c)$，有 $\chi(A+B)=\chi(A)+\chi(B)$, $\chi(AB)=\chi(A)\chi(B)$和 $|\chi(A)|\leqslant\|A\|=\sup_n\sum|a_{nk}|$. 这里 $\chi(A)$是保守矩阵 A 的特征.

10. 设 $A\in(c, c)$，如果对 $x\in c$,

$$\sum a_{nk}x_k\to m\lim x_k(n\to\infty),$$

就称 A 是"乘 m"的矩阵. 求"乘 m"的矩阵的特征. 这样的矩阵什么时候是同正则的?

11. 关于(C, r)平均必须证明 $\lim_n A_n^r/n^r$ 存在且不为零(极限实际上是 $1/\Gamma(r+1)$). 用考虑 $\log A_n^r$ 且展开 $\log\left(1+\frac{r}{k}\right)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$到 $\left(\frac{1}{k}\right)$ 的二阶项的方法来证明它.

12. 当且仅当 $|z|<1$ 时，级数 $\sum z^n$ 收敛. 证明对 $|z|=1$ 但 $z\neq1$ 时用 Abel矩阵可求得此级数的"和"是 $1/1-z$，意思就是若 $|z|=1$，但 $z\neq1$ 时则存在

$$\lim_{x\to1^-}\sum z^n x^n=1/1-z.$$

例如，在刚才定义的"和"的意义下，$1-1+1-\cdots=\frac{1}{2}$，更明确地说，$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$ (Abel).

13. 证明对$Re(z)<1$, $\sum z^n=1/1-z$. 并证明对 $|1-r+rz|<1$, $\sum z^n=1/1-z$(Euler).

14. 若 A 是 Toeplitz 矩阵，B 是 γ-矩阵，证明 AB 是 γ-矩阵. 说明甚至也不需要 BA 存在.

15. 设 $p_0>0$, $p_n\geqslant0$ $(n\geqslant1)$, $P_n=p_0+\cdots+p_n$. 定义 $a_{nk}=p_{n-k}/P_n$ $(0\leqslant k\leqslant n)$, $a_{nk}=0$ $(k>n)$，证明当且仅当 $p_n/P_n\to0$ $(n\to\infty)$时，A 是 Toeplitz 矩阵. 矩阵 A 定义了 Nörlund 平均.

16. 设 A 是(C, r)矩阵，且记

$$t_n^r = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x_k.$$

对 $r > -1$, $h > 0$ 证明

$$A_n^{r+h} t_n^{r+h} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{h-1} A_k^r t_k^r,$$

并由此证明当 $t_k^r \to s$ $(k \to \infty)$ 时,必有 $t_n^{r+h} \to s$ $(n \to \infty)$.

17. 证明定理 7(*b*)(第七章 § 1).

18. 设 $A = (a_{nk})$是复 Toeplitz 矩阵. 问 $Re(A)$和 $Im(A)$是不是 Toeplitz 矩阵? 这里, $Re(A) = (Re\, a_{nk})$等等.

§ 2 矩阵代数

有几种方法将无限矩阵相结合而给出某种矩阵乘积. 最自然的乘积或许是通常的矩阵乘积,这就是发生在重迭变换时的情形. 于是,形式地表示,若 $y = Bx = (\sum_k b_{ik} x_k)$, 则

$$Ay = (\sum_i a_{ni} y_i) = (\sum_i a_{ni} \sum_k b_{ik} x_k),$$

因此

$$(AB)_{nk} = \sum_i a_{ni} b_{ik}. \tag{16}$$

每当写矩阵乘积 AB 时总是理解为 AB 的(n, k)元素由(16)定义. 只有当(16)中的级数对每对 n, k 收敛时, AB 是完全有意义的. 容易看出矩阵的乘法是不可交换的, 而且可能发生 AB 存在而 BA 不存在的情况(见习题). 矩阵乘积使保守的矩阵构成 Banach 代数. 在证明这一点以前,先看另外几种类型的乘积.

若把矩阵看作双重的数列,则构成矩阵 A, B 乘积的最简单的方法是对应项相乘. 乘积的(n, k)元素是 $a_{nk} \cdot b_{nk}$. 这是两个矩阵的逐项乘积——看起来用处很少,虽然以后也偶然提及它,我们不打算为它引进什么记号.

另外一类型的乘积,称为卷积 (convolution product 或只称 convolution), 可以这样得到: 用矩阵 A, B 变换一个幂级数 $\sum z^k$, 然后按 Cauchy 法则,将变换结果相乘:

$$(\sum_k a_{nk} z^k)\cdot(\sum_k b_{nk} z^k) = (\sum_k z^k \sum_{i=0}^{k} a_{ni} b_{n,\,k-i}).$$

于是，我们用

$$(A*B)_{nk} = \sum_{i=0}^{k} a_{ni} b_{n,k-i} \tag{17}$$

定义 $A*B$. 不象矩阵乘法那样，逐项乘积和卷积对所有矩阵都是有意义的，因为不会发生收敛性问题.

我们要考虑仅有的另外一种乘积，是第二卷积(second convolution) $A**B$，它的$(n,\ k)$元素定义为

$$\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} a_{ni} b_{n,k-i}. \tag{18}$$

这种第二卷积是受下面的启发而来的：变换一个幂级数$\sum z^k$；然后关于 z 积分变换后级数的 Cauchy乘积.

我们的第一个结果涉及保守矩阵类$(c,\ c)$.

定理 10 在矩阵乘积下，保守矩阵构成具有单位元的 Banach 代数.

证明 定义 $\|A\| = \sup_n \sum|a_{nk}|$，$\lambda A+\mu B=(\lambda a_{nk}+\mu b_{nk})$，很清楚，$(c,\ c)$是赋范线性空间. 设 $A, B\in(c,\ c)$，那么

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \sup_n \sum_k \left|\sum_i a_{ni} b_{ik}\right| \\ &\leqslant \sup_n \sum_i |a_{ni}| \sum_k |b_{ik}| \leqslant \|A\|\,\|B\| < \infty.\end{aligned}$$

记 $C=AB$，设 $x\in c$，用刚才证明的二重级数的绝对收敛性，得

$$\begin{aligned}C_n(x) &= \sum_k c_{nk} x_k = \sum_k (\sum_i a_{ni} b_{ik}) x_k \\ &= \sum_i a_{ni} \sum_k b_{ik} x_k = A_n(Bx),\end{aligned}$$

因此，$C(x)=A(Bx)$. 由于 B 是保守的，所以 $Bx\in c$，由于 A 是保守的，所以 $C(x)\in c$. 于是$(c,\ c)$在矩阵乘积下是封闭的.

下面检验结合律，而其他代数律的检验留作练习. 设 $A,\ B,\ C$ 在$(c,\ c)$中，由于刚才证明了对 $x\in c$ 有 $(AB)(x)=A(Bx)$，由此立即得对 $x\in c$，$[(AB)C](x)=[A(BC)](x)$，由此令 $x=e_k$ 即得

$(AB)C=A(BC)$.

这个代数的单位元是幺矩阵 I, 它的对角线上的元素为 1, 其他元素为 0, 即 $I=(\delta_{nk})$, 其中 $\delta_{nn}=1$, $\delta_{nk}=0\ (n\neq k)$.

最后,用证明每一个绝对收敛级数是收敛的来说明(c, c)是一个完备空间(见第四章定理 2). 设

$$A^{(r)}=(a_{nk}^{(r)})\in(c,\ c),\quad (r=1,\ 2,\ \cdots),$$

且设 $\sum\|A^{(r)}\|<\infty$. 记 $A_n^{(r)}=\sum_k a_{nk}^{(r)}$, 那么对每一个 r(k 固定), $\lim_n A_n^{(r)}=a^{(r)}$ 和 $\lim_n a_{nk}^{(r)}=a_k^{(r)}$ 存在. 我们将证明 $\sum A^{(r)}$ 依范数收敛于 $A=(\sum_r a_{nk}^{(r)})\in(c,\ c)$. 首先, A 是存在的, 因为, 对所有的 n, k,

$$\sum_r|a_{nk}^{(r)}|\leqslant\sum_r\|A^{(r)}\|<\infty.$$

对所有的 n 也有

$$\sum_r\sum_k|a_{nk}^{(r)}|\leqslant\sum_r\|A^{(r)}\|, \tag{19}$$

由此

$$\sum_k|a_{nk}|=\sum_k\left|\sum_r a_{nk}^{(r)}\right|\leqslant\sum_r\|A^{(r)}\|,$$

由绝对收敛性,交换求和次序是可以的. 现在,得到$\|A\|\leqslant\sum_r\|A^{(r)}\|$. 再一次用由(19)表示的级数的绝对收敛性,得

$$\sum_k a_{nk}=\sum_r\sum_k a_{nk}^{(r)}=\sum_r A_n^{(r)}.$$

由假设 $A_n^{(r)}\to a^{(r)}$ ($n\to\infty$, 对每一个 r), 由于(19), 级数 $\sum_r A_n^{(r)}$对 n 是一致收敛的(Weierstrass M-判别法). 由此得到

$$\sum_k a_{nk}\to\sum_r a^{(r)}\quad (n\to\infty).$$

至于

$$a_{nk}\to\sum_r a_k^{(r)}\quad (n\to\infty,\ k\text{ 固定})$$

可用类似的方法证明. 于是已证明了 $A\in(c,\ c)$. 最后,证明 $\sum A^{(r)}$ 依范数收敛于 A. 因为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{r=m+1}^{\infty}a_{nk}^{(r)}\right|\leqslant\sum_{r=m+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}^{(r)}|\leqslant\sum_{r=m+1}^{\infty}\|A^{(r)}\|,$$

所以

$$\left\|\sum_{r=1}^{m}A^{(r)}-A\right\|=\left\|\left(\sum_{r=m+1}^{\infty}a_{nk}^{(r)}\right)\right\|\leqslant\sum_{r=m+1}^{\infty}\|A^{(r)}\|\to 0\quad (n\to\infty).$$

这就证明了定理 10.

现在考虑 Toeplitz 矩阵集合$(c, c; P)$，把它作为(c, c)的一个子集，很明显，$(c, c; P)$不是一个子空间，因为 $2\sum a_{nk}\to 2(n\to\infty)$ 对任何 Toeplitz 矩阵 A 成立．$(c, c; P)$的一些性质，将在下面定理中给出．

定理 11 作为集合(c, c)的一个子集，$(c, c; P)$ 是具有单位元的闭凸半群．

证明 设A属于$(c, c; P)$的闭包．由于$\|A\|=\sup_n\sum|a_{nk}|$，存在$A^{(m)}\in(c, c; P)$，使得 $\|A^{(m)}-A\|<\varepsilon/2$．并且

$$|a_{nk}|\leqslant\|A^{(m)}-A\|+|a_{nk}^{(m)}|,$$

由此，因为 $a_{nk}^{(m)}\to 0(n\to\infty,\ k$ 固定$)$，就有 $a_{nk}\to 0(n\to\infty,\ k$ 固定$)$，再则

$$\left|\sum_k a_{nk}-1\right|\leqslant\|A^{(m)}-A\|+\left|\sum_k a_{nk}^{(m)}-1\right|,$$

所以 $\sum_k a_{nk}\to 1\ (n\to\infty)$，因此，由定理 3，得 $A\in(c, c; P)$，即$(c,c; P)$是闭的．

显然，$(c, c; P)$ 有比凸性还要强的性质．很明显，对任何 $\lambda+\mu=1$，A，$B\in(c, c; P)$，有 $\lambda A+\mu B\in(c, c; P)$．事实上，可以证明，对任何 $A^{(r)}\in(c, c; P)$，$r=1, 2,\cdots$，$\sum_r\lambda_r=1$ 且 $\sum_r|\lambda_r|\|A^{(r)}\|<\infty$ 时，有 $\sum_r\lambda_r a_{nk}^{(r)}\in(c, c; P)$（见第 4 题）．

假定矩阵乘积是定理中有关半群的乘法运算，当然单位矩阵是一个 Toeplitz 矩阵，它是单位元．剩下的就是检验这一乘积具有封闭性．若 $C=AB$，定理 10 的证明给出了对每一个 $x\in c$ 有 $C_n(x)=A_n(Bx)$．由于 $A\in(c, c; P)$，因此 $\lim_n C_n(x)=\lim_n A_n(B(x))=\lim_n B_n(x)$．又由于 $B\in(c, c; P)$，也有 $\lim_n B_n(x)=\lim_n x_n$．于是当 A，B 是 Toeplitz 矩阵时，AB 是 Toeplitz 矩阵．

当然，$(c, c; P)$ 不是一个群．例如，容易验证 Toeplitz 矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

既没有左的也没有右的逆矩阵．即使一个 Toeplitz 矩阵有一个逆矩阵，而此逆矩阵还可能不是一个 Toeplitz 矩阵(见第 7 题)．

下面考虑矩阵的卷积．用 S 表示所有无限矩阵的集合，用普通的按坐标的加法，以及与标量的乘法．由(17)，很清楚，S 是一个可交换代数．也存在一个卷积单位元 E，它事实上是一个保守矩阵，它的第一列都是 1，其他元素为 0：

$$e_{n0}=1(n=0,\ 1,\ \cdots),\ e_{rk}=0\ \ (k>0).$$

若保持 $(c,\ c)$ 中通常的范数结构，使得 $(c,\ c)$ 是一 Banach 空间，但是用卷积而不是用矩阵的乘积，于是 $(c,\ c)$ 成为一个具有单位元的可交换 Banach 代数．

定理 12 保守矩阵的集合是一个具有单位元的 Banach 卷积代数．

证明 由刚才上面的按语看来，只须证明在卷积下的封闭性和范数的次乘法性质．这是容易的——若 A, B 的特征数是 $a, a_k, b,\ b_k$，则由(17)，记 $C=A*B$，有

$$c_{n,k}\to a_0 b_k+\cdots+a_k b_0 (n\to\infty,\ k \text{ 固定}).$$

又由关于绝对收敛级数的 Cauchy 乘积的初等定理，对每个 n，有

$$\sum_k |c_{nk}|\leqslant\sum_k |a_{nk}|\cdot\sum_k |b_{nk}|,\quad \sum_k c_{nk}=\sum_k a_{nk}\cdot\sum_k b_{nk}.$$

因此 $\qquad \|C\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$ 和 $\sum_k c_{nk}\to a\,b\ (n\to\infty)$，

所以可以看出 C 是保守的，范数是次乘法的．还可指出单位元 E 的范数等于 1．

推论 Toeplitz 矩阵作为卷积代数 $(c,\ c)$ 的一个子集构成一

个没有单位元的半群.

证明 这是一个容易的练习.

最后,关于由(18)给出的第二卷积说上一、两点. 在第二卷积下, 所有矩阵的集 S 是一个可交换的没有单位元的广群 (groupoid) ①. 封闭性和可交换性是明显的. 如果我们假设存在一个单位元 E, 那么对所有的 A 都有 $A**E=A$. 令 $a_{nk}=1$, 得 $e_{nk}=1$. 于是在 $A**E=A$ 中令 $a_{nk}=k$ 就得到矛盾. 因此,不存在单位元. S 不是一个半群,因为结合律不成立. 例如,若

$$A=B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots\\ 1 & 1 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 1 & 0 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

于是 $(A**B)**C$ 的 $(1, 1)$ 元素是 $1/2$, 但 $A**(B**C)$ 的 $(1, 1)$ 元素是 $1/4$.

定理 13 在第二卷积下, $(\gamma, c; P)$ 是 S 的一个子广群.

证明 可以象上面一样证明$(\gamma, c; P)$没有单位元而且不是一个半群. 现在若 $C=A**B$, 其中 $A, B\in(\gamma, c; P)$, 那么, 因为 $a_{nk}\to1$, $b_{nk}\to1$ $(n\to\infty, k$ 固定), 因而由(18)有 $c_{nk}\to1$ $(n\to\infty, k$ 固定). 从容易验证的恒等式(为简单起见省略 n)

$$(i+1)\sum_{j=0}^{i-1}a_jb_{i-1-j}-i\sum_{j=0}^{i}a_jb_{i-j}$$
$$=\sum_{j=1}^{i}j\{a_{i-j}(b_{j-1}-b_j)+b_{i-j}(a_{j-1}-a_j)\}$$

得到

$$\sum_{i=1}^{k}|c_{i-1}-c_i|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}i^{-1}(i+1)^{-1}j\{|a_{i-j}||\Delta b_j|+|b_{i-j}||\Delta a_j|\},$$

① 一个广群是一对$(G, \cdot)$; G 是非空集, “$\cdot$”是 $G\times G$ 到 G 中的一个函数. 在这里的情形, $G=S$, “$\cdot$”是“$**$”.

其中 $\Delta a_j=a_{j-1}-a_j$. 由于

$$\|a_{nk}\|\leqslant|a_{n0}|+|a_{n0}-a_{n1}|+\cdots+|a_{n,k-1}-a_{nk}|$$

和

$$a_{n0}\to 1\ (n\to\infty),$$

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty}|a_{n,k-1}-a_{n,k}|=M(A)<\infty,$$

有

$$\sum_{i=1}^{k}|\Delta c_i|\leqslant\{\sup|a_{n0}|+M(A)\}M(B)$$

$$+\{\sup|b_{n0}|+M(B)\}M(A).$$

记住 $c_i=c_{ni}$ 这一事实,现在看到

$$\sup_n \sum_{i=1}^{\infty}|\Delta c_{n,i}|<\infty.$$

因此 $C=A**B$ 是 γ-矩阵.

习 题 2

1. 设 $A=(a_{nk})$, 若 $a_{nk}=0(k>n)$, 就称 A 为下半矩阵(或下三角矩阵). 证明所有保守的下半矩阵的集 Δ 是一个代数, 且 Δ 的根(radical)中每一个矩阵有零对角线.

2. 设 A 是 Toeplitz 矩阵, B 是保守矩阵. 证明 AB 的特征数与 B 的特征数相同. 给出一个例子,使 BA 的特征数与 B 的特征数不同.

3. 证明同正则矩阵集是$(c,\ c)$的开集,但不是子空间.

4. 设 $A^{(r)}\in(c,\ c;P)$, $r=1,\ 2,\ \cdots$, $\sum_r\lambda_r=1$, 且 $\sum_r|\lambda_r|\,\|A^{(r)}\|<\infty$. 证明 $(\sum_r\lambda_r\,a_{nk}^{(r)})\in(c,\ c;P)$.

5. (i) 证明$(\gamma,\ c;P)$在逐项乘积下是一个广群. 它是一个代数吗?

(ii) 在逐项乘积下,$(c,\ c)$是一个代数吗?

6. 在矩阵乘积下,$(l_\infty,\ c)$是$(c,\ c)$的闭子代数吗?

7. 证明$(C,1)$平均的 Toeplitz 矩阵有一个非保守的逆矩阵.

8. 给出两个保守的非 Toeplitz 矩阵 A, B 的例子, 使 $A*B$ 是 Toeplitz 矩阵.

9. 证明 $A\in(\gamma,\ c)$的充要条件是 $a_{nk}\to a_k(n\to\infty,\ k$ 固定),

$$M(A)=\sup_n\sum_{k\geq 1}|a_{n,k-1}-a_{n,k}|<\infty.$$

定义

$$\|A\|=\sup_n|a_{n0}|+2M(A).$$

证明这是(γ, c)上的一个范数，而且(γ, c)是一个 Banach 空间，它在第二卷积下是一个可交换非结合无单位元的代数.

10. 设E是(γ, c)的子集，且$\lim_k a_{nk}=0$, $n=0, 1, \cdots$. 证明在第二卷积下，E是(γ, c)中的一个理想.（条件$\lim_n a_{nk}=0$是重要的，因为为了使一个矩阵$A\in(\gamma, c)$是比收敛性强，此条件是必要的. 至于最后这一短句的意义，可参看下面§3.）

§3 可 和 性

利用无限矩阵来研究的序列的可和性主要有三种类型——通常的，绝对的和强的. 首先，考虑"通常的"可和性，而保留"绝对的"和"强的"两词以表明其他类型.

任意取一个矩阵$A=(a_{nk})$. 当且仅当对每一个n, $A_n(x)=\sum_k a_{nk}x_k$存在，且$A_n(x)\to l(n\to\infty)$时，序列$x=(x_k)$叫做A-可和到l，记为$x_k\to l(A)$. 例如，若I是幺矩阵，那么$x_k\to l(I)$的意义恰好是在通常收敛意义下$x_k\to l$ $(k\to\infty)$.

用(A)表示所有A-可和序列的集合. 集合(A)称为矩阵A的可和性域. 于是，若$Ax=(A_n(x))$，那么$(A)=\{x|Ax\in c\}$，这里c是收敛序列的集合. 例如，$(I)=c$. 当且仅当A是一个保守矩阵时，包含关系$c\subset(A)$成立. 特别，当A是 Toeplitz 矩阵时，$c\subset(A)$，但在这里集合包含掩盖了由$x\in c$, $x_k\to l$必有$A_n(x)\to l$而不仅是$Ax\in c$这一更精确的信息.

历史的材料和特殊的求和方法的详细性质可以在 Hardy 的杰出的著作«Divergent Series» (1949)中找到. 我们在很大程度上把自己限制于更一般的问题. 然而，有一点我们应该先讲一下，象我们今天理解的序列和级数的收敛性，是由 Cauchy 明确定义的. 在他之前许多年，Léonard Euler(1707—1783)——或许是各个时代最伟大的分析家——曾经完成过关于级数奇迹般的功绩. 他大步向前进，发现了许多关系式和漂亮的公式，这是读者从初等

分析中就知道的. Euler没有一个严格的收敛性的定义,他可以满不在乎地在公式 $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-\cdots$ 中令 $x=1$(我们知道仅在 $|x|<1$ 时是对的),且得到奇怪的结果: $\frac{1}{2}=1-1+1-\cdots$. 在我们的收敛性的 $(\varepsilon, N(\varepsilon))$ 定义框框之内,上面引述的公式是永远无意义的——右边是某个极限的符号(序列 $(1, 0, 1, 0, 1, \cdots.)$ 的极限),而这个极限是不存在的,因此,它不能是 $\frac{1}{2}$. 然而,可和性的概念赋予此公式以意义. 若 $x=(1, 0, 1, 0, \cdots)$,则容易验证 x 是 $(C,1)$-可和到 $\frac{1}{2}$,这可以写为 $x_k\to\frac{1}{2}(C, 1)$,或写为级数形式 $1-1+1-\cdots=\frac{1}{2}(C, 1)$. $1-1+1-\cdots=\frac{1}{2}(\text{Abel})$ 的情况也是一样. 为此,必须证明 $\sum a_kx^k\to\frac{1}{2}(x\to1-)$,其中 $a_k=(-1)^k$. 但是对 $|x|<1$,我们有

$$\sum a_kx^k=1-x+\cdots=(1+x)^{-1}\to1/2(\text{当 } x\to1^-).$$

于是有两个特殊矩阵或求和方法,用这两个方法,发散级数 $1-1+1-\cdots$ 的"和"等于值 1/2.

上面的例子是有趣的,但是价值不大. 下面只举三件事情:可和性在Fourier级数理论上已经有了成绩: 关于 $(C, 1)$-可和性的Fejér定理,或许是这一理论在连续几年很少进展以后的第一个突破. 附带说说, Fejér定理的一个推论是Weierstrass近似定理(这个近似定理实质上是说, [0, 1]上的多项式依上确界范数在 $C[0, 1]$ 中是稠密的). 还有, Norbert Wiener的Tauber理论引导他利用Lambert可和性去证明一个素数定理. 第三, Cesàro可和性使级数的乘法取得令人满意的形式.

现在,回到一些一般的考虑上来. 若 A 是Toeplitz矩阵,那么 $c\subset(A)$——更确切地说,每一个收敛序列 A-可和到相同的极限. 象我们早已看到的那样,可能发生包含是严格的情形. 例如,

$x=(1, 0, 1, 0, \cdots)\in(C, 1)$, 但 $x\notin c$. 这样, $(C, 1)$平均至少使一个发散序列可和. 我们说$(C, 1)$比收敛性强. 对一般的矩阵 A, 情形类似. 但也可能某一个 Toeplitz 矩阵 A 仅使收敛序列可和, 即$(A)=c$. 于是我们说 A 等价于收敛性. 除了 $(I)=c$ 的明显的情形之外, 看起来还不能准确知道什么使一个 Toeplitz 矩阵等价于收敛性. 一个证明$(A)=c$的定理叫做 Mercer 定理, 这是按照 Mercer 命名的, 他证明了这种类型的一个重要定理. 他的结果可以描述如下: 设 A 由 $A_n(x)=\alpha x_n+(1-\alpha)m_n$ 定义, 其中 $\alpha>0$, m_n 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的算术平均. 于是 A 是 Toeplitz 矩阵, 因为由 $x_k\to l$ 必有

$$A_n(x)\to\alpha l+(1-\alpha l)=l$$

(实际上没有给 α 以限制). Mercer 证明了当 $\alpha>0$ 时, 由 $A_n(x)\to l$ 必有 $x_k\to l$. 对于这个证明, 可参考 Hardy 的《Divergent Series》定理 51.

一个给定的 Toeplitz 矩阵 A 可能使某些发散序列可和. 但 Steinhaus 首先证明了 A 不能使所有有界序列可和. 事实上, 他证明了存在一个由 0 和 1 组成的序列, 它不是 A-可和的. 我们将从我们在矩阵变换方面的结果推导 Steinhaus 定理. 至于原始定理的一个证明可参看 Cooke 著《Infinite Matrices and Sequence Spaces (无穷矩阵与序列空间)》定理 4.4(III).

定理 14 (Steinhaus) 给定任何 Toeplitz 矩阵 A, 总有一个有界的序列不是 A-可和的.

证明 特征 $\chi(A)=1$. 于是 $A\notin(l_\infty, c)$, 因为在(l_∞, c)中的矩阵有零特征(见定理 6(i)和(ii)). 但是 $A\in(l_\infty, c)$当且仅当 A 使所有有界序列可和, 因此得出结果. 注意, 在定理的假设中 "Toeplitz" 可用 "同正则" 代替, 于是给出稍为更一般的结果.

我们已经注意到一个 Toeplitz 矩阵可能等价于收敛性. 现在

证明某种类型的同零矩阵总是比收敛性强. 一个矩阵 A, 若 $a_{nk}=0(k>n)$ 且 $a_{nn}\neq 0$ 对所有 n 成立, 则称为正规的. 若 A 是正规的, 且 $y_n=\sum_k a_{nk}x_k$, 那么容易从中解出 x, 比如说, $x_n=\sum_k b_{nk}y_k$. 还可算出 $b_{nn}=\dfrac{1}{a_{nn}}$.

定理 15 每一个正规的同零矩阵都比收敛性强, 即至少能使一个发散序列可和.

证明 设 A 是正规的且是同零的, 那么它的逆矩阵存在, 用 B 记它, 记

$$b=\left(\sum_{k=0}^{n} b_{nk}\right)_{n\in N} \quad 和 \quad b_k=(b_{nk})_{n\in N}\ (k=0,\ 1,\ \cdots).$$

于是 $A_n(0)=1$ 和 $A_n(b_k)=\delta_{nk}$, 所以序列 b 和 b_k 在 (A) 中. 令 $\|x\|=\sup_n|A_n(x)|$, 这里 $x\in(A)$, 我们看到 (A) 是一个赋范线性空间. 我们能用类似对 c^* 使用过的方法(见第四章)刻划对偶空间 $(A)^*$ 的特征. 已经发现 $f\in(A)^*$ 当且仅当存在一数 t 和一序列 $(t_k)\in l_1$ 使

$$f(x)=t\lim_n A_n(x)+\sum_k t_k A_k(x) \tag{20}$$

对所有 $x\in(A)$ 成立. 事实上, 当 $f\in(A)^*$ 时, $t=t(f)=f(b)-\sum f(b_k)$ 和 $t_k=t_k(f)=f(b_k)$, 其中 b, b_k 定义如上.

现在假设 A 不是比收敛性强. 那么 $(A)=c$, 而我们将证明 $f(x)=\lim x_n$ 定义一个 $(A)^*$ 的元素 f. 很明显, f 在 (A) 上是线性的, 并且对 $x\in c$,

$$\begin{aligned}|x_n|&=\left|\sum_k x_k\delta_{nk}\right|=\left|\sum_k x_k\sum_{r=k}^{\infty} b_{nr}a_{rk}\right|\\&\leqslant\sum_{r=0}^{\infty}|b_{nr}|\left|\sum_{k=0}^{r}a_{rk}x_k\right|\\&\leqslant\|B\|\|x\|.\end{aligned} \tag{21}$$

这样计算是合理的, 因为 $B=A^{-1}$ 是保守的, 它的证明如下: 若 $x\in c$, 那么 $A(A^{-1}x)=(AA^{-1})x=x$, 所以 $A^{-1}x(\in A)=c$, 因此 A^{-1}

是保守的. 从(21)我们得到

$$|f(x)|=|\lim x_n|\leqslant\|B\|\|x\|,$$

所以 f 在 (A) 上是有界的. 现在由(20), 有

$$\begin{aligned}f(e)-t\lim_n A_n(e)&=\sum_{r=0}^{\infty}t_r\sum_{k=0}^{r}a_{rk}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=k}^{\infty}t_rA_r(e_k)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}[f(e_k)-tA(e_k)],\end{aligned}$$

即 $1-t\lim_n\sum_k a_{nk}=-t\sum_k\lim_n a_{nk}$, 也就是 $1=t\chi(A)$. 因为 $\chi(A)=0$, 这是不可能的. 于是, $(A)=c$ 的假定是错误的. 所以 $c\subset(A)$ 是严格的. 这就证明了定理.

为了使一个 γ-矩阵比收敛性强, 有一个简单的必要条件. 现在把它写出来.

定理 16 若 $A\in(\gamma, c; P)$ 至少能使一个发散级数可和, 那么 $\lim_k a_{nk}=0$ 对 $n=0, 1, 2, \cdots$, 成立.

证明 设 $\sum b_k$ 是发散的而且是 A-可和的. 那么 $\sum a_{nk}b_k$ 对每一个 n 收敛. 因此, 当序列 (d_k) 有有界变差时, $\sum a_{nk}b_kd_k$ 对每一个 n 收敛. 现在由 $\sup_n\sum|\Delta a_{nk}|<\infty$ 必有 $\lim_k a_{nk}=l_n$, $n=0, 1, \cdots$. 假设存在 n, 使 $l_n\neq0$, 那么对此 n, 有 $|a_{nk}|\geqslant|l_n|/2$ 对 $k>M$ 成立, 因而 $(d_k)_{k>M}=(1/a_{nk})_{k>M}$ 有有界变差. 因此, $\sum\limits_{k>M}a_{nk}b_kd_k$ 收敛, 即 $\sum b_k$ 收敛, 与 $\sum b_k$ 发散的事实相矛盾. 于是 $l_n=0$ 对每个 n 成立.

现在简略地考虑绝对的和强的可和性. (l_1, l_1) 中的矩阵 A, 称为绝对保守的. 若 A 是在 $(l_1, l_1; P)$ 中, 则称为绝对正则的. 利用定理 5 可知, 当且仅当

$$\sup_k\sum_n|a_{nk}|<\infty \quad 和 \quad \sum_n a_{nk}=1\ (k=1, 2, \cdots)$$

时, A 是绝对正则的. 对任何矩阵 A, 用 $|A|$ 表示使 $A_n(x)=$

$\sum_k a_{nk} x_k$ 对每个 n 存在且 $\sum_n |A_n(x)| < \infty$ 的所有序列 x 的集合. 于是, $x \in |A|$ 是 A-绝对可和的(或$|A|$-可和的). 当且仅当 A 是绝对保守的时, 有 $l_1 \subset |A|$.

或许, 最简单的绝对可和性方法是由一阶 Cesàro 平均给出的. 若

$$t_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (n+1-k) a_k$$

且 $t \in c$, 那么说 $\sum a_k$ 是$(C, 1)$-可和的. 若 $t \in BV$, 则说 $\sum a_k$ 是 $|C, 1|$-可和的. 容易证明 $|C, 1| \subset (C, 1)$. 而因为

$$t_n - t_{n-1} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k a_k \quad (n \geqslant 1),$$

很清楚, $l_1 \subset |C, 1|$. 更一般地, $l_1 \subset |C, k|$ $(k>0)$ 是正确的(见习题3).

与通常的可和性情形类似, 绝对正则可和性可能等价于绝对收敛. 例如, 不难证明, 当且仅当 $\lim\inf(\lambda_{n+1}/\lambda_n) > 1$ 时 $|R^*, \lambda, 1| = l_1$. 这里我们说 $\sum x_k$ 是 $|R^*, \lambda, 1|$-可和的是指 $t \in BV$, 其中

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} (1 - \lambda_k/\lambda_{n+1}) x_k.$$

$|R^*, \lambda, 1|$ 是"间断的"绝对一阶 Riesz 可和性. 我们说 $\sum x_k$ 是 $|R, \lambda, k|$-可和的 $(k>0$, 这里 $|R, \lambda, k|$ 是"连续的"情形), 若 $C^k(U)$ 是一个$[\lambda_0, \infty)$上的有界变差函数, 这里

$$C^k(U) = \sum_{\lambda_n < U} (1 - \lambda_n/U)^k x_n.$$

照 Steinhaus 定理(定理 14)类推, 一个人可能倾向于认为没有哪个绝对正则矩阵能使所有的条件收敛级数可和(他大概是这样类比的: 绝对正则类似于 Toeplitz, 条件收敛类似于有界性). 然而, 实际上存在绝对正则矩阵能使所有的条件收敛级数可和. 例如, $a_{1k}=1$, $a_{nk}=0$ $(n>1, k=1, 2, \cdots)$. 某些进一步的结果可看习题.

最后，我们转到强可和性．对任何矩阵 A，和任何序列 $p=(p_k)$，$p_k>0$，我们说 $x=(x_k)$ 是 $[A, p]$-可和（或 (A, p)-强可和）到 l 的，记为 $x_k\to l[A, p]$，若 $A_n(|x-l_e|^p)$ 对每个 n 存在，且当 $n\to\infty$ 时趋于 0．关于强可和性，记

$$A_n(|x|^p)=\sum_k a_{nk}|x_k|^{p_k}.$$

若 $A_n(|x|^p)=O(1)$，我们说 x 对 (A, p) 是强有界的．还有，$[A,p]$ 表示所有 $[A, p]$-可和的 x 的集合．$[A, p]_\infty$ 表示对 (A, p) 强有界的 x 的集合，$[A, p]_0$ 是满足 $A_n(|x|^p)=o(1)$ 的 x 的集合．将 A 特殊化可得到一些已知的空间．例如，若 $a_{nk}=1(1\leqslant k\leqslant n)$，$a_{nk}=0$ $(k>n)$，那么 $[A, p]_\infty=l_p$．用 $l_\infty(p)$ 表示 $[I, p]_\infty$，这里 I 是幺矩阵．若 $A=(C, 1)$，则 $x_k\to l[C, 1, p]$ 的意思是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-l|^{p_k}\to 0.$$

现在证明关于强可和性的三个结果．

定理 17 设 $p=(p_k)$ 是有界的，而且 A 是非负的．那么 $[A, p]_0$，$[A, p]$，$[A, p]_\infty$ 是线性空间．

证明 只考虑 $[A, p]_0$；其他的可类似地讨论．若 $H=\sup p_k$，那么

$$|a_k+b_k|^{p_k}\leqslant C(|a_k|^{p_k}+|b_k|^{p_k}),$$

这里 $C=\max(1, 2^{H-1})$．还有 $|\lambda|^{p_k}\leqslant\max(1, |\lambda|^H)$，并记 $\Lambda=\sup|\lambda|^{p_k}$，$M=\sup|\mu|^{p_k}$．因此

$$\limsup A_n(|\lambda x+\mu y|^p)\leqslant C\Lambda\limsup A_n(|x|^p)+CM\limsup A_n(|y|^p).$$

结果就出来了．

对某些矩阵 A 来说，为了使 $[A, p]_0$ 等等是线性空间 p 的有界性不但是充分的，也是必要的．作为一个例子，考虑空间 $l(p)$．若 $l(p)$ 是一个线性空间，那么对任何 $x\in l(p)$ 总有 $2x\in l(p)$，即

只要$\sum|x_k|^{p_k}<\infty$就有$\sum 2^{p_k}|x_k|^{p_k}<\infty$成立．由此很容易得到$p_k=O(1)$．

定理 18 对任何非负的矩阵A，和任何有界序列p，$[A,p]_0$是一个以

$$g(x)=\sup_n(\sum_k a_{nk}|x_k|^{p_k})^{1/M}$$

为副范数拓扑线性空间，其中$M=\max(1,\sup p_k)$．

证明 很明显，$g(\theta)=0$，$g(x)=g(-x)$．g在$[A,p]_0$上是次可加的，这由类似于第二章§1中对$l(p)$给出的论证得到．还必须验证乘法的连续性．对任何复数λ，有$|\lambda|^{p_k}<\max(1,|\lambda|^H)$，$H=\sup p_k<\infty$．因此在$[A,p]_0$上，$g(\lambda x)<(\sup|\lambda|^{p_k})^{1/M}g(x)$，由此当$\lambda\to 0$，$x\to\theta$时，必有$\lambda x\to\theta$．同样，当$x\to\theta$，$\lambda$固定时，必有$\lambda x\to\theta$．现在设$\lambda\to 0$，$x$固定．对$|\lambda|<1$，有$A_n(|\lambda x|^p)<\varepsilon$对$n>N(\varepsilon)$成立．同样，对$1\leqslant n\leqslant N$，因为$\sum_k a_{nk}|x_k|^{p_k}<\infty$，存在$M$使

$$\sum_{k=M}^{\infty}a_{nk}|\lambda x_k|^{p_k}<\varepsilon.$$

取λ足够小，则我们有$A_n(|\lambda x|^p)<2\varepsilon$对所有$n$成立．因此，当$\lambda\to 0$时，$g(\lambda x)\to 0$．这就证明了定理．

在我们的最后一个定理中，考虑的是强正则性的问题，我们说一"对"(A,p)是强正则的，如果由$x_k\to l$必有$x_k\to l[A,p]$的话．对强正则性找出关于A和p的精确条件的问题，看来是十分困难的．然而如果把p加以限制，则有如下结果．

定理 19 设m，M是常数，$0<m\leqslant p_k<M$．那么当且仅当$A\in(c_0,c_0)$时(A,p)是强正则的．

证明 对充分性，由于$p_k\geqslant m>0$，当$x_k\to l$时，必有$|x_k-l|^{p_k}\to 0$．因此，由$A\in(c_0,c_0)$必有$x_k\to l[A,p]$．

现在假设当$x_k\to l$时必有$A_n(|x-le|^p)\to 0$．那么当$|x_k-l|^{q_k}$

$\to 0$ 时必有 $\sum a_{nk}|x_k-l|\to 0$, 这里 $q_k=\dfrac{1}{p_k}$. 因为 $q_k\geqslant\dfrac{1}{M}>0$, 当 $x_k\to l$ 时必有 $|x_k-l|^{q_k}\to 0$. 因此, 分解 $x_k\to l$ 成实部和虚部然后分解它们成正的和负的部分, 我们看到当 $x_k\to l$ 时必有 $\sum a_{nk}(x_k-l)\to 0$. 由此 $A\in(c_0, c_0)$.

注意: $p_k\leqslant M$ 在充分性上是多余的, 而 $p_k\geqslant m$ 在必要性上是多余的.

习 题 3

1. 证明 Abel 方法不弱于任何 Cesàro 方法, 即证明由 $\sum a_n=s(C, r)$, $r>-1$, 必有 $\sum a_n=s(\text{Abel})$. 提示, 注意

$$\sum a_n x^n=(1-x)^{r+1}\sum A_n^r x^n t_n^r,$$

其中 t_n^r 是 r 阶 Cesàro 平均. 事实上, Abel 方法强于所有的 Cesàro 方法(考虑 $\sum a_n$, 其中

$$\exp\{(1+x)^{-1}\}=\sum a_n x^n.$$

2. 证明 $a_{nk}=2(n-k+1)n^{-1}(n+1)^{-1}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$, $a_{nk}=0(k>n)$, 是一个 Toeplitz 矩阵. 检查序列 $((-1)^{k+1}k)$是不是 A-可和的?

3. (i) 证明对每一个 Toeplitz 矩阵 A 总有一个与之对应的 γ-矩阵 B

$$b_{nk}=\sum_{p=k}^{\infty}a_{np}.$$

(ii) 设 B 是一个 γ-矩阵, 证明当且仅当 $\lim_n\lim_k b_{nk}=0$ 时, $a_{nk}=b_{nk}-b_{n,k+1}$ 是 Toeplitz 矩阵.

4. 证明如下的 Steinhaus 类型的定理: 给定任何 γ-矩阵 B, 总存在一个有有界部分和的级数, 它不是 B-可和的.

5. 证明 $a_{nk}=(e^{-n}n^{k+1})/(k+1)$, $(n, k=1, 2, \cdots)$是 Toeplitz 矩阵, 并证明对应的 γ-矩阵 B (见第 3 题(i))由

$$b_{nk}=\frac{1}{k!}\int_0^n e^{-t}t^k\,dt$$

给出.

6. 若 Cesàro 平均 t_n^r 有有界变差. 即 $\sum|t_n^r-t_{n-1}^r|<\infty$. 我们说 $\sum a_k$ 是 $|C, r|$-可和的或 $a\in|C, r|$. 证明 $l_1\subset|C, r|$ 对所有的 $r>0$ 成立.

7. 证明 $\sum(-1)^k k^{-1}$ 是 $|C, 1|$-可和的, 但 $\sum(-1)^k/\log(k+1)$ 不是.

8. 用 $B_1(a)=a_1$,

$$B_n(a)=\frac{n(n-2)}{(n-1)^2}a_{n-1}+\frac{a_n}{n^2}(n\geqslant 2)$$

定义变换 $B_n(a)=\sum_k b_{nk}a_k$. 证明 B 是绝对正则的，且当 $\sum a_n$ 条件收敛时 $\sum_n|B_n(a)|=\infty$. 并证明存在一个 $a_n\neq O(1)$ 的级数是 B-绝对可和的.

9. 证明每一个行有界的绝对正则矩阵能使每一个条件收敛级数可和，对此级数矩阵是适用的. 行有界的意义是对 $n\geqslant r$, $a_{nk}=0$, 这里 r 与 k 无关. 而 A 适用于 $\sum x_k$ 的意义是 $\sum a_{nk}x_k$ 对每一个 n 收敛.

10. 关于强可和性，证明 $l(p)$ 既能看作 $[A, p]_\infty$ 空间又能看作 $[B, p]_0$ 空间，即能找到矩阵 A, B 使 $l(p)=[A,p]_\infty=[B,p]_0$. 对有界的 p, 证明 $l(p)$ 是一个拓扑线性空间.

11. 设 $0<p_k\leqslant 1$, 且记 $[I, p]_\infty=l_\infty(p)$, 其中 I 是幺矩阵. 证明 $l_\infty(p)$ 可用 $g(x)=\sup|x_k|^{p_k}$ 作副范数；以及当且仅当 $\inf p_k>0$ 时，有 $x\in l_\infty(p)$.

12. 若 A 是非负的，且 $0<\inf p_k\leqslant\sup p_k<\infty$, 证明 $[A, p]_\infty$ 在 § 3 定理 18 的副范数下是一个拓扑线性空间.

13. 设 I 是幺矩阵，证明当且仅当 p 是有界时，$[I, p]$ 是一个线性空间.

14. 定义 $a_{nk}=\frac{1}{n}(1\leqslant k\leqslant n)$, $a_{nk}=1(k>n)$, 且对所有的 $k\geqslant 1$ 取 $p_k=k$. 证明 (A, p) 是强正则的，但 $A\notin(c_0, c_0)$. 与 § 3 定理 19 比较.

§ 4 Tauber 定理

在这简短的一节，只能将 Tauber 理论的宽广的范围作一介绍. 对于较深刻的 Tauber 定理的其他细节读者可参考 Hardy «Divergent Series» 以及那里引用的期刊文献. 我们涉及的是 Tauber 理论的相当近代的发展，它与论述所谓 Tauber 常数有关.

首先，稍稍勾划一下历史发展的轮廓. Abel 在 1826 年证明了若 $\sum a_n=s$, 则 $\sum a_n=s$(Abel), 即每一个收敛级数是 Abel-可和到同样的和. 我们知道其逆一般是不成立的. 例如，$\sum(-1)^n=\frac{1}{2}$(Abel),

但 $\sum(-1)^n \neq \frac{1}{2}$. 何时其逆是对的? 在对 a_n 加以限制后, Tauber 在1897年首先证明若 $\sum a_n = s$ (Abel) 且 $na_n \to 0$ $(n\to\infty)$, 则 $\sum a_n = s$. 于是, 条件 $na_n \to 0$——现在称为 Tauber 条件——使我们能从 Abel-可和性导出收敛性. Tauber 还证明了一个有关的定理, 称为 Tauber 第二定理. 把他的两个定理列出来以便参考.

T_1: 由 $\sum a_n = s$(Abel)且 $na_n \to 0$ 必有 $\sum a_n = s$.

T_2: 由 $\sum a_n = s$(Abel)且 $na_n \to 0(C, 1)$必有 $\sum a_n = s$.

当然, T_1 是 T_2 的推论, 因为当 $na_n \to 0$ 时, 必有 $na_n \to 0(C, 1)$. 在1911年, Littlewood 着手搞更深入的 Tauber 定理, 他用 $na_n = O(1)$, 即 na_n 是有界的, 代替 $na_n \to 0$ (即 $na_n = o(1)$)来证明 T_1. 一般地说, 一个 Tauber 定理是一个从可和性去推断收敛性的结果, 通常用的办法是设置一个关于被求和的级数的项的阶条件. 一个非常一般的 Tauber 定理已被 Wiener 于本世纪三十年代创造出来, 他还用这个定理给出素数定理的一个证明(Wiener, 1932).

在 Tauber 定理的 o-结果和 O-结果之间, 有一类中间的结果, 它们加强 o-结果并且在所规定的意义下是"最佳可能的". 这些中间的结果不象 O-结果那么深刻, 但它们在 Tauber 理论中增加了有价值的内容, 这些中间的结果中的第一个是出于 Hadwiger (1944) 的定理:

定理 20 存在一个绝对常数 M_1 使

$$\limsup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_n x_n^k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant M_1 \limsup_n n|a_n|, \tag{22}$$

这里 $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

这个结果很漂亮, 看起来是由于它关于 (a_n) 不加上什么条件. 很清楚, Tauber 的第一个定理是 Hadwiger 定理的一个推论. Tauber 第二定理的一个推广是由 Wintner(1947) 给出的定理:

定理 21 存在一个绝对常数 M_2，使(22)的左边小于或等于

$$M_2 \limsup_n n^{-1}\left|\sum_{k=1}^{n} k a_k\right|. \tag{23}$$

这样 Wintner 的结果蕴涵了 Tauber 的第二定理．然后，由 Hartman (1947) 证明了对常数 M_1 和 M_2 的最佳值是 $M_1=\gamma+2\beta$, $M_2=M_1+2/e$，这里 γ 是 Euler 常数 $0.57721\cdots$，且

$$\beta \hat{=} \int_1^{\infty} e^{-k} u^{-1} du = 0.21938\cdots.$$

我们用最佳值一词的意思是，例如说，

$$M_1=\max\{(\limsup t_n)/(\limsup n|a_n|)\},$$

这里最大值是对所有使 $\limsup n|a_n|>0$ 的 a 取的，t_n 是指(22)中的表示式．最佳值 M_1 和 M_2 称为 Tauber 常数．

本节中，我们只去证明一个关于 Tauber 常数的一般定理．Hartman 最佳值可以作为一个特殊情形得到而且只需用极少量的计算．在定理 22 中将给出在 Tauber 条件

$$A=\limsup_n n^{-1}\left|\sum_1^n k a_k\right|<\infty \tag{24}$$

下一般矩阵变换的 Tauber 常数存在的充分必要条件．条件 $\limsup_n n|a_n|<\infty$ 导致一个类似的定理(见第 5 题)．在此定理前，提出一个引理．它可以用类似于证明第七章 § 1 定理 6 的方法证明．证明的细节留作练习．

引理 设 $a_{nk}\to 0$ ($n\to\infty$, k 固定)，且

$$\limsup \sum_k |a_{nk}|=C<\infty.$$

那么只要 $\limsup|s_n|<\infty$，总有

$$\limsup_n \left|\sum_k a_{nk} s_k\right| \leqslant C \limsup_n |s_n|.$$

还有，存在一个序列 (s_k)，$\limsup|s_n|=1$，使

$$\limsup_n \left|\sum_k a_{nk} s_k\right|=C.$$

在下面的定理中，对任何矩阵(a_{nk})记 $\Delta a_{nk}=a_{nk}-a_{n,k+1}$．所

有的和都是从 $k=1$ 到 $k=\infty$，除非另外说明，而且上极限是当 $n\to\infty$ 时取的.

定理 22 设 A 由(24)给定，且 $A<\infty$，那么为了使

$$B_n(a)=\sum b_{nk}a_k,\ C_n(a)=\sum c_{nk}a_k$$

对每一个 n 存在，并且有一个常数 M，使

$$\limsup|B_n(a)-C_n(a)|\leqslant MA \tag{25}$$

的充要条件是

(a) $|b_{nk}|+|c_{nk}|\to 0$ ($k\to\infty$, n 固定),

(b) $b_{nk}-c_{nk}\to 0$ ($n\to\infty$, k 固定),

(c) $\sum_k(|\Delta(b_{nk}/k)|+|\Delta(c_{nk}/k)|)<\infty$ (对每个 n),

(d) $D=\limsup\sum k|\Delta(\{b_{nk}-c_{nk}\}/k)|<\infty$.

当(a)—(d)成立时，可取 $M=D$，并且这个常数 D 是最佳可能的.

证明 充分性 记 $nt_n=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k$，则对每个 n，当(a)，(c)成立，且 $A<\infty$ 时

$$\sum_{k=1}^{p}b_{nk}a_k=b_{np}t_p+\sum_{k=1}^{p-1}k\Delta(b_{nk}/k)t_k$$
$$\to\sum k\Delta(b_{nk}/k)t_k\ (p\to\infty). \tag{26}$$

在用 C 代替 B 时，同样是成立的. 因此

$$B_n(a)-C_n(a)=\sum k\Delta(\{b_{nk}-c_{nk}\}/k)t_k.$$

于是，当(b)，(d)成立时，可应用引理，并得到(25)和 $M=D$.

必要性 若 $B_n(a)$ 对任何 $A<\infty$ 存在，那么(固定 n，直到另作说明)应用 Toeplitz 定理到由(26)给出的 (t_k) 的变换，

$$\sum k|\Delta(b_{nk}/k)|<\infty. \tag{27}$$

因为 $\limsup_n|a_n|<\infty$ 蕴涵 $A<\infty$，由 $B_n(a)$ 存在可知

$$\sum|b_{nk}|/k<\infty. \tag{28}$$

现在，(27)蕴涵 $b_{nk}/k\to l_n$ ($k\to\infty$)，由此

$$\sum_{k=1}^{p} b_{nk}/k \sim pl_n \quad (p \to \infty)$$

这与(28)相矛盾,除非 $l_n=0$. 因此

$$|b_{np}| = |p\sum_{k=p}^{\infty} \Delta(b_{np}/k)| \leqslant \sum_{k=p}^{\infty} k|\Delta(b_{nk}/k)| \to 0 \quad (p \to \infty).$$

同样的结果对 C 也成立. 由此, (a)和(c) 是必要的. (b)的必要性可在(25)中取 $a_k=1$, $a_n=0$ $(n \neq k)$, $k=1, 2, \cdots$得到. 现在, 我们有

$$B_n(a) - C_n(a) = \sum k \Delta(\{b_{nk} - c_{nk}\}/k) t_k$$

对每一个 n 成立, 只要 $A<\infty$. 现在很清楚, 由所有使 $A<\infty$ 的序列 $a=(a_k)$ 所成的空间 X, 在范数 $\|a\|=\sup_n|t_n|$ 下是一个 Banach 空间. 还有, 每一个由 $f_n(a)=B_n(a)-C_n(a)$ 定义的 f_n 在 X^* 内, 而且容易验证

$$\|f_n\| = \sum k|\Delta(\{b_{nk} - c_{nk}\}/k)|.$$

由假设, 在 X 上我们有 $\lim\sup|f_n(a)| \leqslant MA < \infty$, 因此由 Banach-Steinhaus 定理

$$D = \lim\sup\|f_n\| < \infty,$$

这就是(d), 于是证明了定理.

作为定理 22 的一个推论, 我们将求出 Hartman 的 Tauber 常数 $\gamma+2\beta+2/e$, 这是定理 21 中的 M_2 的最佳值. 取 $b_{nk}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=x^k$, 其中 $x=x_n=1-\frac{1}{n}$, 且 $c_{nk}=1$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, $c_{nk}=0 (k>n)$. 于是可以直接验证定理 22 的 (a)—(d) 以及

$$D = \lim\sup_n \{2x^{n+1} - \frac{1}{n} - \log n - \sum_{1}^{n} \frac{1}{k} + 2\sum_{n+1}^{\infty} x^{k+1}/(k+1)\}. \tag{29}$$

现在, 不难证明

$$\sum_{n+1}^{\infty} x^{k+1}/(k+1) \to \beta = \int_1^{\infty} e^{-u} u^{-1} du \quad (n \to \infty)$$

(见第 4 题). 因此 $D=\frac{2}{e}+\gamma+2\beta$, 因为

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\log n+\gamma+o(1),$$

这是从初等分析中就知道的. 于是得到了 Abel 方法的 Tauber 常数 D. 有趣味的是, 在这种情形 D 是作为一个极限而存在, 而不仅仅是一个上极限.

一个类似于定理 22 的结果包含 Tauber 条件 $\limsup n|a_n|<\infty$. 它的证明是按照同样的想法, 但更为简单(见第 5 题).

习 题 4

1. 不用 Hadwiger 定理和 Wintner 定理证明 Tauber 定理 T_1 和 T_2.
2. 证明 § 4 定理 22 前面的引理.
3. 验证 § 4 的方程(29).
4. 设 $r=r(n)$, $0<r<1$, 而且 $-n\log r\to 1$(当 $n\to\infty$), 证明

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} r^k k^{-1}=\int_{-n\log r}^{\infty} n^{-1}(e^{t/n}-1)^{-1}e^{-t}dt$$

而且上面的积分当 $n\to\infty$ 时趋于

$$\beta=\int_1^{\infty} e^{-t}t^{-1}dt.$$

5. 证明与定理 22 相伴的定理: 为了使得只要 $A'=\limsup_n n|a_n|<\infty$, 就有 $B_n(a)$, $C_n(a)$ 对每一个 n 存在, 而且有一个常数 M, 使

$$\limsup_n |B_n(a)-C_n(a)|\leqslant MA',$$

它的充分必要条件是

(b') $b_{nk}-c_{nk}\to 0$ ($n\to\infty$, k 固定),

(c') $\sum k^{-1}(|b_{nk}|+|c_{nk}|)<\infty$ (每一个 n),

(d') $D=\limsup_n \sum k^{-1}|b_{nk}-c_{nk}|<\infty$.

当这些条件成立时, 可取 $M=D$, 于是这是最佳可能的.

§ 5 供进一步研究的一些问题

这里收集一些问题介绍给希望继续学习本章和其他各章的课

题的读者. 一些问题是还算初等的水平——这些是不带“*”的. 其他的一些问题已有解答, 但此解答有时是花上几年的时间才找到的. 那些我认为比较困难的问题, 已加上了“*”号, 例如 2*. 某些问题用“找出…的必要和充分条件”开头. 据我所知, 这些问题常常给读者以今天所达到的知识的状况. 少数问题带有两个星号“**”——这些问题将证明是很有激励性的.

本节若能引导读者自己去系统地提出并解答新的问题的话, 那就达到它的最高目的了.

1.** 有一个基底的赋范空间是可分离的. 一些可分离的 Banach 空间有一个基底, 是否每一个可分离的 Banach 空间都有一个基底? (P. Enflo 证明了有一个可分离的 Banach 空间没有基底. Acta Math. (1973).)

2.* 线性度量空间 X 上的一个旋转 U (围绕 θ), 是 X 到自身中且使 $U(\theta)=\theta$ 的等距满射.

证明若 X 是一个实赋范空间, 则每一个旋转必是线性的 (见 Banach, 1955, p. 166).

3.* 证明 $l_p(1\leqslant p\neq 2)$ 中的一般旋转具有形式 $y_n=\varepsilon_n x_{\phi(n)}$, 这里 $|\varepsilon_n|=1$, ϕ 是 N 的一个置换(排列), 且 $y=U(x)=(y_n)$. (见 Banach, 1955, p. 178.)

4.* 找出 $l(p)$ 中一般旋转的形式. (解答不知道.)

5. 若 X 是一个 Banach 空间, 那么 $X\times X=X^2$ 是用 $\|z\|=\|x\|+\|y\|$ 为范数的 Banach 空间, 这里 $z=(x, y)\in X^2$, 定义

$$(x, y)+(x', y')=(x+x', y+y') \text{和} \lambda(x, y)=(\lambda x, \lambda y).$$

证明 c 连续同构于 c^2, l_p 连续同构于 $l_p^2(p\geqslant 1)$.

6.* 证明 $C[0, 1]$ 同构于 $C[0, 1]\times c$.

7. 设 s 是所有序列的空间, E 是 s 的一个子集, 证明

$$E^{\dagger}\equiv\{x|\sum|x_k y_k|<\infty, \text{对所有的 } y\in E\}$$

是 s 的一个子空间. $E^\dagger$ 称为 E 的 Köthe-Toeplitz 对偶. 注意, 我们用了与线性空间的代数对偶同样的记号——这不应产生妨碍.

证明 $c^\dagger=l_1,\ l_1^\dagger=l_\infty,\ l_p^\dagger=l_q\ (1<p<\infty)$.
$l_\infty^\dagger$ 是什么?

8.** 找出 $l(p)^\dagger$ (它的定义见第 7 题).

9. 证明 $A\in(\gamma,\ \gamma; P)$ 当且仅当

$$\sup_n \sum_k \left|\sum_{r=1}^n \Delta a_{rk}\right|<\infty,\quad \sum_n a_{nk}=1\quad (k=1,\ 2,\ \cdots).$$

10. 证明: $A\in(BV,\ l_\infty)$ 当且仅当

$$M=\sup_{n,k}|a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nk}|<\infty.$$

并证明 $A\in(BV,\ c)$ 当且仅当 $M<\infty$ 且

$$\lim_n \sum_{k=p}^\infty a_{nk}\quad (p=1,\ 2,\ \cdots)$$

存在.

11.* 找出 $A\in(l_1,\ c)$ 的充分必要条件(见 Cooke, 1950).

12.** 找出 $A\in(l_p,\ l_s)$, $p>0$, $s>0$ (也包括 l_∞) 的充分必要条件. 甚至在 $p=s=2$ 的情形都没有解决(见第七章 § 1 定理 9).

13. 设 $(C,\ -1)$ 是所有使 $nx_n\to 0$ 的序列 $x\in\gamma$ 的集合. 若 $x\in(C,\ -1)$ 我们说级数 $\sum x_k$ 是 $(C,\ -1)$ 可和的. 记 $t_n=s_n+nx_n$, $s_n=x_0+x_1+\cdots+x_n$. 证明 $x\in(C,\ -1)$ 当且仅当 $t\in c$. 并证明一矩阵 $A\in((C,\ -1),\ c; P)$ 当且仅当 A 可表示为

$$a_{nk}=b_{nk}=k\,\Delta b_{nk},$$

这里 B 是一个 γ-矩阵. 证明表示式是唯一的. (见 Maddox, 1965, 1966a.)

14. $(l_1,\ l_p)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 在

$$\|A\|=\sup_k\left(\sum_n|a_{nk}|^p\right)^{1/p}$$

下是不是 Banach 空间?

在第七章 § 2 中定义的各种乘积下, $(l_1,\ l_p)$ 是一个代数吗?

15*. 你能在 (l_1, l_1) 上定义一个卷积型的运算，使 (l_1, l_1) 成为一个具有恒等元的 Banach 代数吗？

16．对矩阵 A, B, 如果当一序列是 B-可和的时，同一序列必为 A-可和到同一极限，我们就记 $A\supset B$. 证明 $A\supset(R, \lambda, 1)$ 当且仅当 A 是 Toeplitz 且

$$\sup_n \sum_k \lambda_{k+1} |\Delta(a_{nk}/\Delta\lambda_k)| < \infty.$$

(见 Maddox, 1964.) 在这个问题中，$(R, \lambda, 1)$ 表示 λ 型和 1 阶的 Riesz 平均.

17**. 找出使矩阵 A 满足 $A\supset(R, \lambda, k)$ 的充分必要条件. (见上面的第 16 题和 Maddox 1964, 有部分解答.)(解答不知道.)

18**. 找出 $A\supset(C, k)$ 的充分必要条件(见 Cooke, 1952).

19*. (Fejér 定理). 若 f 有周期 2π, 在 $[0, 2\pi]$ 上可积，而且 $f(x_0+2t)+f(x_0-2t)\to 2s(x_0)$, $(t\to 0)$, 证明 f 的 Fourier 级数 $a_0/2+\sum_{n>1}(a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0)$ $(C, 1)$-可和到 $s(x_0)$.

此外，若 f 还是在 $[0, 2\pi]$ 上连续的，证明 Fourier 级数在 $[0, 2\pi]$ 上一致 $(C, 1)$-可和到 f, 因此是处处 $(C, 1)$-可和到 f. 导出 Weierstrass 逼近定理：多项式的集合在 $C[0, 2\pi]$ (或 $C[0, 1]$) 中是稠密的. (见 Knopp 的书.)

20．若 $k>-1$, $\sum a_n$ 是 (C, k)-可和的，证明 $a_n=o(n^k)$. 这是对于 Cesàro 平均的“限制定理”.

21*. 若 $\sum a_n=s$, 且 $na_n=O(1)$, 证明 $\sum a_n=s(C, -1+d)$, $d>0$ (见 Hardy, 1945, 定理 45).

22**. 设 $k>0$ 固定. 证明 Riesz 平均 (R, λ, k) 等价于收敛性，当且仅当

$$\Lambda_n=\lambda_{n+1}/(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=O(1).$$

(见 Hardy 和 Riesz, 1915; 又 Kuttner, 1965.)

23**. 设 $k>0$ 固定. 找出关于 λ 的充分必要条件，使绝对

Riesz 平均$|R, \lambda, k|$等价于绝对收敛. 解答不知道. 但猜测条件是$\Lambda_n=O(1)$(见上面第22题). (对此问题的某些情形, 见 Maddox, 1966 b.)

24*. A 是一个下半 Toeplitz 矩阵, 使

$$\liminf_n(|a_{nn}|-\sum_{k=1}^{n-1}|a_{nk}|)>0.$$

证明 A 与收敛性是等价的(Agnew, 1952).

25. 设 A 是保守的矩阵,对 $x\in(A)$, 令 $\|x\|=\sup_n|\sum_k a_{nk}x_k|$, 并且把$(A)$中距离是 0 的元素看作等同的. 证明$(A)$是可分离的.

26*. 证明: 若一个保守矩阵能使一个有界发散序列可和, 那么它能使一个无界序列可和(Wilansky 的书, p. 231, 问题 31).

27. 设 f, g 在$[0, \infty)$上是连续的,而且 $f(x)\sim Ax^a$, $g(x)\sim Bx^b(x\to\infty)$, 这里 a, b, A, B 是常数, 而且 $a>-1$, $b>-1$. 证明当 $x\to\infty$ 时,

$$\int_0^x f(t)g(x-t)dt\sim AB\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}x^{a+b+1}.$$

28. 对 Riesz 平均, 证明当 $k'\geqslant k\geqslant 0$ 时,

$$(R, \lambda, k)\subset(R, \lambda, k')\text{和}|R, \lambda, k|\subset|R, \lambda, k'|.$$

(利用上面第 27 题, 和关于一个级数 $\sum a_n$ 的关系式

$$C^{k+l}(x)=\frac{\Gamma(k+l+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(l)}\int_0^x(x-t)^{l-1}C^k(t)\,dt,$$

其中 $C^k(x)=\sum\limits_{\lambda_n<x}(x-\lambda_n)^k a_n$.)

29*. 证明: $A\in(\gamma, l_1)$ 当且仅当 $\sum_n|a_{n1}|<\infty$ 而且

$$\sup\sum_k\left|\sum_{n\in\sigma}\Delta a_{nk}\right|<\infty. \tag{1}$$

这里 σ 表示一个有限的正整数集, F 为所有集合 σ 的类, 而且上面的上确界是对 F 的所有元素取的(见 Maddox, 1967 a).

30. 证明: 当且仅当 A 是绝对正则的而且第 29 题(1)成立

时，$A\in(l_1, l_1; P)\cap(\gamma, l_1)$.

31.** 找出使 A 属于下列各情况的充分必要条件：

(i) $A\in(BV, l_1)$, (ii) $A\in(c, l_1)$, (iii) $A\in(l_\infty, l_1)$.

32.** 试找出关于绝对保守矩阵的类似于第七章 § 3 定理 15 的一个结果——用绝对收敛代替收敛，用条件收敛级数代替发散序列.

33．设 A 是非负矩阵，p 是任何正的序列. 证明：$[A, p]_\infty$, $[A, p]$ 和 $[A, p]_0$（见第七章 § 3）是所有序列所成空间的绝对凸子集.

34．设 $p_k>0$, $q_k>0$ 且 $c_0(p)$ 表示所有使 $|x_k|^{p_k}\to 0$ 的 $x=(x_k)$ 的集合. 证明：$c_0(q)\subset c_0(p)$ 的充要条件是

$$\liminf p_k/q_k>0.$$

35.** 找出关于 $p=(p_k)$ 的充分必要条件使当 $x_k\to l$ 时必有 $x_k\to l[C, 1, p]$.

36．设 $0<p<q$. 证明：当 A 是非负的且在 (l_∞, l_∞) 中时，由 $x_k\to l[A, q]$ 必有 $x_k\to l[A, p]$.

37．设 A 是 Toeplitz 矩阵且设 $0\leqslant p_k\leqslant q_k$, $q_k/p_k\to\infty$. 证明：当 $x_k\to l[A, q]$ 时，$x_k\to l[A, p]$ 一般不成立 (Maddox, 1967 b).

38.* 证明：对 $0<p_k\leqslant 1$, $l(p)^*=l_\infty(p)$ 成立 (Simons, 1965).

39.** 对有界的 p 刻划 $[C, 1, p]^*$ 的特征.

40.** 找出关于 p 的充分必要条件使一个 $[C, 1, p]$-可和的序列的极限是唯一的.

41．(Kuttner 定理) 设 $0<p<1$，对所有的 k, $p_k=p$, 且设 A 是 Toeplitz 矩阵. 证明总存在一个序列是 $[C, 1, (p_k)]$-可和的，而且是 A-不可和的. 与第七章 § 3 Steinhaus 定理比较. Kuttner 定理可以用第七章 § 1 定理 7 证明（见 Maddox, 1968; Kuttner, 1946).

文 献 目 录

AGNEW, R. P., Equivalence of methods for evaluation of sequences, *Proc. American Math. Soc.* 3(1952), 550–6.

AHLFORS, L., *Complex Analysis* (McGraw-Hill, 1953). (有中译本.《复分析》,张立译,上海科学技术出版社,1962.)

BANACH, S., *Théorie des opérations linéaires* (Chelsea, New York, 1955).

COHEN, L. W. and ERLICH, G., *The Structure of the Real Number System* (Van Nostrand, 1963).

COOKE, R. G., *Infinite Matrices and Sequence Spaces* (Macmillan, 1950).

COOKE, R. G., On T-matrices at least as efficient as (C, r)summability, and Fourier–effective methods of summation, *J. London Math. Soc.* 27(1952), 328–37.

GELFAND, I. M. and SHILOV, G. E., *Generalized Functions*, vol. I (Academic Press, 1964). (有中译本.《广义函数》I, 林坚冰译,科学出版社,1965.)

HADWIGER, H. Über ein Distanz-theorem bei der A-Limitierung, *Comm. Math. Helv.* 16(1944), 209–14.

HALMOS, P. R., *Lectures on Ergodic Theory* (Chelsea, New York, 1956).

HARDY, G. H., *Divergent Series* (Oxford, 1949).

HARDY, G. H. and RIESZ, M., *The General Theory of Dirichlet's Series* (Cambridge Tract No. 18, 1915).

HARTMAN, P., Tauber's theorem and absolute constants, *Amer. J. of Math.* 69(1947), 599–606.

HILBERT, D., *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integral-*

gleichungen, Leipzig, 1912.

JONES, D. S., *Generalized Functions* (McGraw-Hill, 1966).

KNOPP, K., *Theory and Application of Infinite Series* (Blackie, 1964).

KUTTNER, B., Note on strong summability, *J. London Math. Soc* 21 (1946), 118–22.

KUTTNER, B., On discontinuous Riesz means of order 2, *J. London Math. Soc.* 40 (1965), 332–7.

LITTLEWOOD, J. E., The converse of Abel's theorem on power series, *P. London Math. Soc.* (2), 9 (1911), 434–83.

MADDOX, I. J., Some inclusion theorems, *Proc. Glasgow Math. Assn.* 6 (1964), 161–8.

MADDOX, I. J., Matrix transformations of (C, −1), summable series, *Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch.* A 68 (1965), 129–32.

MADDOX, I. J., Matrix transformations in a Banach space, *Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch.* A 69 (1966), 25–9.

MADDOX, I. J., Note on Riesz means, *Quarterly J. of Math.* (2), 17 (1966), 263–8.

MADDOX, I. J., On theorems of Steinhaus type. *J. London Math. Soc.* 42 (1967), 239–44.

MADDOX, I. J., Spaces of strongly summable sequences, *Quarterly J. of Math.* (2) 18 (1967), 345–55.

MADDOX, I. J., On Kutter's theorem, *J. London Math. Soc.* 43 (1968), 285–90.

ROBERTSON, A. P. and ROBERTSON, W. J., *Topological Vector Spaces* (Cambridge, 1964).

RUDIN, W., *Principles of Mathematical Analysis* (McGraw-Hill, 1964). (有中译本,《数学分析原理》上、下册,赵慈庚、蒋铎译, 人民教育出版社, 1979.)

SCHWARTZ, L., *Théoric des distributions* (Paris, Hermann, 1950, 1951).

SIMONS, S., The sequence spaces $l(p_\nu)$ and $m(p_\nu)$, *P. London Math. Soc.* (3), 15 (1965), 422–36.

SUPPES, P. C., *Axiomatic Set Theory*(Van Nostrand, 1960).

TAYLOR, A. E., *Introduction to Functional Analysis* (Wiley, New York, 1958).

WIENER, N., Tauberian theorems, *Ann. of Math.* (2), 33(1932), 1–100.

WILANSKY, A., *Functional Analysis*(Blaisdell, 1964).

WINTNER, A., On Tauber's theorem, *Comm. Math. Helv.* 20(1947), 216–22.

ZYGMUND, A., *Trigonometrical Series*(Dover, 1955).

索　引

一　画

二　画

三　画

四 画

五 画

六 画

七　画

八　画

九 画

十　画

十 一 画

十 二 画

十三画以上

集和空间的符号